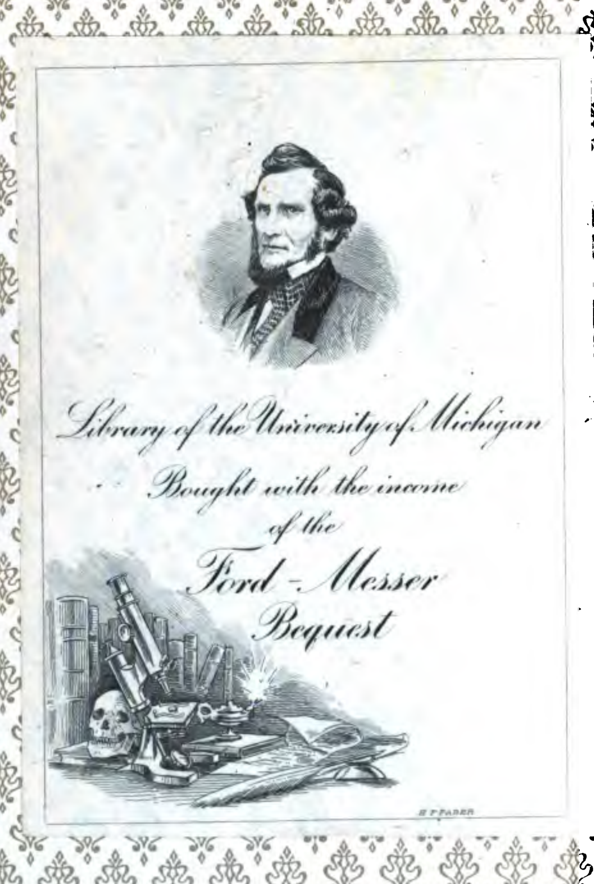
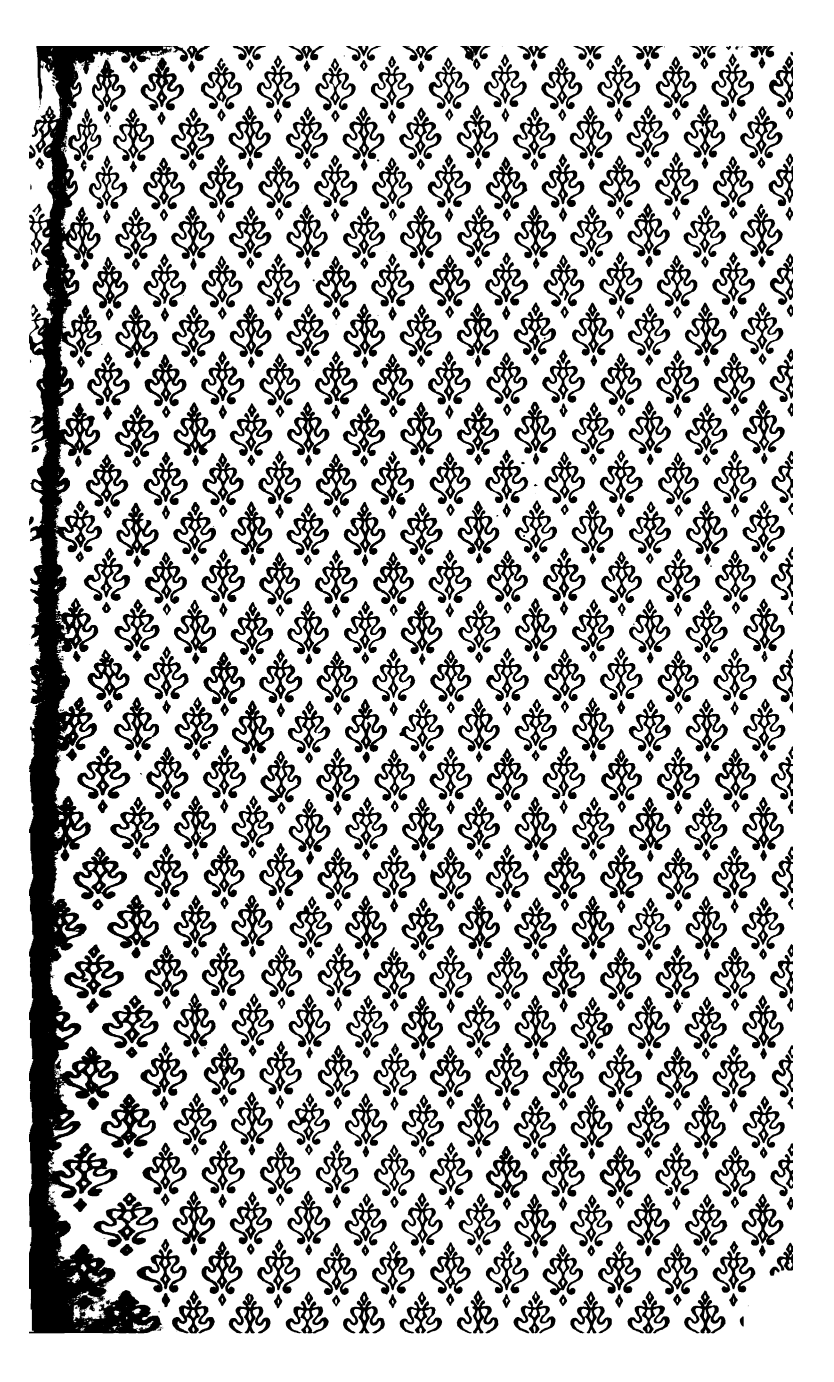

Library of the University of Michigan
Bought with the income
of the
Ford - Messer
Bequest



Nachrichten

von der

K. Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

aus dem Jahre 1870.

Göttingen.

Verlag der Dieterichschen Buchhandlung.

1870.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

Januar 5. №. 1. 1870.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber die auf Ebenen eindeutig abbildbaren algebraischen Flächen.

von

Max Nöther.

Vorgelegt von A. Clebsch.

Meine weiteren Arbeiten über einige Punkte, welche ich in der früher der Königl. Gesellschaft mitgetheilten Note über algebraische Functionen[1]) angeregt habe, haben mich auf einen Weg geführt, auf dem man die dort erwähnte in zwei Parametern rationale Darstellung der Coordinaten von solchen Flächen, welche auf Ebenen eindeutig abbildbar sind, auch wirklich leisten kann. Da bis jetzt nur die Behandlung einer Anzahl specieller Flächen durch Herrn Clebsch bekannt ist, so erlaube ich mir, diesen allgemeinen Weg kurz mitzutheilen.

Zunächst setze ich voraus, dass eine rationale Curvenschaar S der Fläche F bekannt sei, die so von einem Flächenbüschel ausgeschnitten wird, dass jede Fläche des Büschels die Fläche F in einer beweglichen Curve schneidet. Dieses genügt, um die Fläche Punkt

[1] Nachrichten von der Königl. Ges. Jahrg. 1869, No. 15.

für Punkt eindeutig auf einer Ebene abbilden zu können, und zwar vorerst so, dass der Schaar S ein Geradenbüschel der Ebene entspricht.

Ich lege zuerst beliebig in den Raum einen Ebenenbüschel, welcher dem erwähnten Flächenbüschel projectivisch ist, und projicire von einem beliebigen Punkte des Raumes aus jede Curve der Schaar S auf die entsprechende Ebene des Ebenenbüschels. Die so entstehenden Curven erzeugen eine zweite Fläche Φ, welche der Fläche F Punkt für Punkt eindeutig entspricht. Die Fläche Φ enthält eine Schaar Σ von rationalen Curven, welche von einem Ebenenbüschel, je eine bewegliche Curve von einer Ebene des Büschels, ausgeschnitten werden. Die Axe dieses Büschels ist eine vielfache Gerade von Φ.

Es sei Φ von der $n$ten Ordnung, Σ eine Schaar rationaler Curven C_λ von der $m$ten Ordnung, die Axe des Ebenenbüschels also eine $(n-m)$ fache Gerade der Fläche Φ.

In der Ebene E_λ der Curve C_λ lege ich nun eine zweifach unendliche Schaar Q_λ von Curven $(m-2)$ter Ordnung, welche durch jeden $i$fachen Punkt von C_λ $(i-1)$fach, und ausserdem durch $m-4$ feste, übrigens beliebige Punkte der Ebene E_λ hindurchgehen. Jede Curve dieser Schaar Q_λ schneidet C_λ noch in $m-2$ beweglichen Punkten. Benutzt man daher diese zweifach unendliche Schaar zur Transformation von C_λ, so entspricht dieser Curve C_λ Punkt für Punkt eindeutig eine neue rationale Curve C'_λ, die von der $(m-2)$ten Ordnung ist und die man als ebenfalls in der Ebene E_λ gelegen annehmen kann. Indem man nun für jede Curve C_λ der Schaar Σ so verfährt und nur die $m-4$ festen Punkte eindeutig vom Parameter λ des Ebenen-

büschels abhängen lässt, erhält man eine zweite Schaar Σ' von rationalen Curven C'_λ der $(m-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche eine Fläche Φ' erzeugen, die Φ Punkt für Punkt eindeutig entspricht. Diese Fläche Φ' ist von irgend einer Ordnung n', aber ein Ebenenbüschel schneidet aus ihr eine Schaar von rationalen Curven $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, eine Ebene je eine bewegliche Curve aus.

Durch weitere Anwendung dieses Verfahrens auf die Fläche Φ' erhält man eine Fläche Φ'', aus welcher ein Ebenenbüschel eine Schaar rationaler Curven $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung ausschneidet, und welche der Fläche Φ', und somit auch Φ und F, Punkt für Punkt eindeutig entspricht. Nach $\frac{m-1}{2}$, resp. $\frac{m}{2}-1$ Anwendungen dieses Processes gelangt man daher endlich zu einer von den folgenden beiden Flächenfamilien:

Erstens, zu einer windschiefen Fläche r^{ter} Ordnung mit einer $(r-1)$ fachen Geraden. Diese Fläche lässt sich direct abbilden, und zwar drücken sich für ein gerades r die Coordinaten der Fläche aus als rationale Functionen $\frac{r}{2}+1)^{\text{ter}}$ Ordnung zweier Parameter, mit einem $\frac{r}{2}$fachen und einem einfachen Fundamentalpunkte; einem gewissen Punkte der vielfachen Geraden entspricht, ausser $r-2$ Punkten, noch die Verbindungslinie der beiden Fundamentalpunkte. Für ein ungerades r drücken sich die Cordinaten der Fläche aus als rationale Functionen $\left(\frac{r+1}{2}\right)^{\text{ter}}$

Ordnung zweier Parameter, mit einem $\left(\frac{r-1}{2}\right)$ fachen Fundamentalpunkte.

Oder zweitens, zu einer Fläche f, von der $r$ten Ordnung mit einer $(r-2)$fachen Geraden, aus welcher also ein Ebenenbüschel, der diese Gerade zur Axe hat, eine Kegelschnittschaar ausschneidet, eine Ebene je einen Kegelschnitt. Die Fläche enthalte ferner s Doppelpunkte. Die Abbildung dieser Fläche beruht auf folgendem Satze:

„Es giebt eine $(3q+1)$fache Schaar von rationalen Raumcurven q. Ordnung, welche $q-1$ Punkte mit einer gegebenen Geraden gemein haben. Wenn eine Gerade a, ferner $s \left(s \overline{\overline{<}} \frac{3q+1}{2}\right)$ feste, aber beliebige Punkte, und weiter $(3q-2s+1)$ Gerade b, welche sämmtlich a, aber nicht sich schneiden, gegeben sind, so existirt nur eine Curve q. Ordnung, welche durch die s festen Punkte geht, die Gerade a $(q-1)$mal und die Geraden b je einmal schneidet."

Man erhält diesen Satz durch den Nachweis, dass die Curven q. Ordnung, welche nur durch $(3q-2s)$ Gerade b gehen, im Uebrigen aber den Bedingungen des Satzes genügen, eine Fläche der Ordnung $2q-s$ erzeugen, die in a eine $(2q-s-1)$fache Gerade besitzt, ferner die $(3q-2s)$ Geraden b einfach enthält und durch die s festen Punkte einfach hindurchgeht, durch welche Bestimmungen die Fläche völlig und eindeutig gegeben ist.

Durch Betrachtung der Geradenpaare, welche auf der Fläche f liegen, ergiebt sich nun der Satz:

„Es existiren auf der Fläche f $2^{3r-2s-5}$ rationale Curven $(r-2)^{ter}$ Ordnung, welche jedes Glied der Kegelschnittschaar in je einem Punkte schneiden. Im Falle r gerade, liegen je zwei solcher Curven auf einer Fläche $(\frac{r}{2}-1)$ Ordnung, welche die vielfache Gerade von f zur $(\frac{r}{2}-2)$fachen Geraden besitzt; im Falle r ungerade, geht durch jede der Curven ein Flächenbüschel $(\frac{r-1}{2})^{ter}$ Ordnung, der in der vielfachen Geraden von f eine $\frac{r-3}{2}$ fache Gerade besitzt und f noch in einer Schaar rationaler Curven $(r-1)^{ter}$ Ordnung schneidet, die je einen Punkt mit jedem Gliede der Kegelschnittschaar gemein haben."

Somit ist durch irgend eine der Curven $(r-2)^{ter}$ Ordnung auf jedem Kegelschnitt der Schaar ein Punkt eindeutig bestimmt, und man kann durch diesen Punkt einen Geradenbüschel legen. Die Coordinaten der Fläche f drücken sich dann rational aus durch die beiden Parameter des Ebenenbüschels und des Geradenbüschels, und zwar als Funktionen r^{ter} Ordnung, welche einen $(r-2)$ fachen und $3r-4$ einfache Fundamentalpunkte gemein haben; und umgekehrt repräsentirt jede solche Abbildung eine Fläche r^{ter} Ordnung mit $(r-2)$ facher Geraden. Ferner liegen, den s Doppelpunkten entsprechend, s mal je zwei einfache Fundamentalpunkte mit dem $(r-2)$ fachen auf einer Geraden.

Auf solche Weise gelangt man durch eine Reihe von eindeutigen Abbildungen hindurch zu einer eindeutigen Abbildung der gegebenen Fläche F auf einer Fbene, wobei sich die ursprünglich betrachtete rationale Curvenschaar S als Geradenbüschel abbildet. Sollen sich die ebenen Schnitte von F durch Curven von möglichst niedriger Ordnung abbilden, so wird dies durch den Satz:

„Man kann jede Cremona'sche Transformation, die ebene Systeme in einander überführt, durch eine Reihenfolge von Transformationen zweiter Ordnung ersetzen"

dadurch geleistet, dass man eine Reihenfolge von Transformationen 2. Ordnung ausführt und die 3 Grundpunkte einer solchen Transformation jeweils in die höchsten Fundamentalpunkte hineinlegt.

Ich bemerke noch, dass die oben durchgeführte Reduction von Flächen F auf zwei Flächenfamilien ganz in derselben Weise sich überhaupt auf Flächen anwenden lässt, aus welchen ein Flächenbüschel eine rationale Curvenschaar, und zwar jede Fläche des Büschels mehrere bewegliche Curven, ausschneidet.

Als Resultat dieser Untersuchung ergiebt sich durch directe Durchführung die Lösung des Grundproblems der Abbildung algebr. Flächen auf Ebenen dahin:

„Sobald eine Fläche eine einfach unendliche Schaar rationaler Curven besitzt, welche von einem Flächenbüschel, je eine bewegliche Curve von einer Fläche des Büschels, ausgeschnitten werden, lässt sich die Fläche Punkt für Punkt eindeutig auf einer Ebene abbilden."

Mannheim, 1869 Dec. 10.

Universität.

Dritter Bericht über die geognostisch-palaeontologische Sammlung der Universität Göttingen.

In dem Jahre 1869 hat die geognostisch palaeontologische Sammlung nach allen Richtungen erfreuliche Fortschritte gemacht.

Vor allem ist dies dadurch geschehen, dass Se. Excellenz der Herr Minister auf den von Herrn Professor Sartorins von Waltershausen unterstützten Antrag des Unterzeichneten hochgeneigtigst einen ausserordentlichen Zuschuss zum Ankauf der Petrefacten Sammlung des Herrn Dr. Landgrebe zu Cassel bewilligte. Es war diese Sammlung im Wesentlichen eine sogenannte allgemeiue, d. h. sie enthielt Versteinerungen aus allen Gruppen der organischen Welt und aus allen geognostischen Formationen. Derartige Sammlungen werden, se bst wenn sie ersten Ranges sind, immer ungeeignet zum Ankauf sein für grössere öffentliche Sammlungen und Museen, da sie nothwendig unter einer grossen Anzahl Doubletten nur wenig wirklich Neues und Werthvolles bringen können. Ganz anders war dies bei der jungen, eigentlich noch immer im Entstehen begriffenen, hiesigen Sammlung der Fall, die nur aus einzelnen Localsuiten, wie sie Liebhaberei oder persönliche Beziehungen der mit ihrer Verwaltung Betrauten oder auch der blinde Zufall zusammenführte, entstanden ist, ohne dass eine dem Lehrzweck entsprechende planmässige Vergrösserung und Ausfüllung der vorhandenen

Lücken damit Hand in Hand ging. Für sie war der Ankauf gerade einer solchen allgemeinen Sammlung, so lange sie nur aus vorherrschend guten Exemplaren bestand, angezeigt. Es wurde dadurch manche beim Unterricht schmerzlich fühlbare Lücke ausgefüllt, manche wichtige Form erst jetzt in der bei der unvermeidlichen Abnutzung in öffentlichen Sammlungen doppelt nothwendigen, ausreichenden Individuenzahl gewonnen und überhaupt ein etwas grösseres Gleichmass hergestellt. Daneben enthielt die Landgrebe'sche Sammlung aber auch eine Anzahl trefflicher Localsuiten aus dem nördlichen und östlichen Hessen, die bei der Nachbarschaft ihrer Fundpunkte von doppeltem Werthe für die hiesige Sammlung sein mussten. Von ihnen ist hervorzuheben eine Serie Tertiärversteinerungen vom Habichtswald, darunter der von Landgrebe beschriebene (Jahrb. f. Mineral. etc. 1843 S. 141) *Aphodius*-ähnliche Käfer und eine wohl einzig schöne Reihe Exemplare von *Leuciscus leptus* Ag.; ferner eine Anzahl Conchylien aus dem Schaumkalk von Haueda an der Diemel, die durch ihren schönen Erhaltungszustand an die einst von Ferd. Roemer von dem unfern gelegenen Willebadessen beschriebenen Erfunde und an das Vorkommen von Lieskan bei Halle erinnern; eine Suite Pflanzen aus der Lettenkohle von Gross-Almerode, eine andere aus dem Kupferschiefer von Frankenberg und eine dritte aus dem Kohlen-Rothliegenden von Klein-Schmalkalden. Alles zusammengenommen hat unsere Sammlung durch die Einverleibung der Landgrebe'schen Sammlung einen Zuwachs von über 1500 Nummern erfahren.

Aber auch ausserdem hat die Sammlung sich wesentlich vergrössert und verbessert. In der

geognostischen Abtheilung der Provinzialsammlung haben sich zunächst die krystallinischen Gesteine gegen ihren früheren Bestand fast verdoppelt, indem Herr Dr. O. Schilling auch in diesem Jahre mit dankenswerther Liberalität 3 grössere Sendungen von im ganzen über 150 Nummern krystallinischer Gesteine nebst deren Mineraleinschlüssen und Contactbildungen aus dem Harze schenkte. Zu dem wurde noch manche Einzelheit von mir selbst gesammelt. Herr Dr. Schilling schenkte ferner noch etwa 60 Nummern älterer Sedimentärgesteine und Gangstücke aus dem Harze. Eine Anzahl interessanter Stücke von den basaltischen Gesteinen aus der Umgegend von Göttingen brachte ich selbst zusammen. Endlich schenkte Herr Dr. Lossen in Berlin eine Reihe Harzer Sericitgesteine.

Der palaeontologische Theil der Provinzialsammlung ist vor allem bereichert worden durch eine 115 Species umfassende ausgezeichnete Sammlung von Petrefacten aus der Liasmulde von Markoldendorf, die Herr Ben K. Emerson aus Nashua (N. H.) derzeit hier schenkte. Es ist dies das palaeontologische Material, welches der demnächst erscheinenden Arbeit des Herrn Emerson über jene Gegend zu Grunde liegt. Derselbe schenkte ebenfalls eine Serie Petrefacten aus dem hiesigen Lias und eine schöne Platte mit *Myophoria transversa* Bornem. und Myaciten aus der Lettenkohle von Vardaelsen. Herrn A. Franke zu Hannover verdankt die Sammlung eine fast 4 Quadratfuss grosse Platte mit Pflanzenresten aus dem Wealden von Obernkirchen. H. Fischer aus Osterode schenkte ein sshönes Exemplar des *Holaster carinatus* Goldf. sp. aus den un-

teren Pläner von Langelsheim und Herr H. Carmichael aus Newyork derzeit hier ein Exemplar des *Goniatites compressus* Goldf. sp. aus dem Hutthal bei Clausthal, ein Exemplar der *Nucula subtriangula* Koch und Dk. vom Elligser Brink und endlich ein 150 Pfd. schweres Stück eines grossen in „Holzopal" verwandelten Baumstammes aus dem Oligocaen von Dransfeld. Die Herren Montscheuer und Amtmann G. Schmid aus Walkenried gaben 3 bei dem Eisenbahnbau unweit Walkenried 10 Fuss tief in einer Spalte im Gyps gefundene Knochen. Es sind dies ein rechter humerus nnd tibia vom *Rhinoceros antiquitatis* Blumenb. und der linke Metatarsus eines Pferdes. Endlich habe ich auch selbst auf von mir bald allein bald in Begleitung meiner Zuhörer unternommenen Excursionen die Sammlung um manches bereichern können.

In der allgemeinen Sammlung verdankt die geognostische Abtheilung Herrn Dr. Landgrebe über 80 Stück jüngerer Eruptivgesteine nebst deren Contactbildungen und den in jenen so schön vorkommenden Olivinkrystallen aus der Umgegend von Cassel. Durch Vermittelung des Herrn Professor Selenka erhielten wir von dem königlichen Reichsmuseum zu Leiden (Herr Prof. Schlegel, Director) 129 vorherrschend vulkanische Gesteine von Java. Der grosse eigene Werth dieser Sendung wird noch dadurch erhöht, dass sämmtliche Stücke Doubletten der Junghuhn'schen Sammlung sind. Herr Prof. Roth in Berlin schenkte eine Reihe krystallinischer Gesteine von verschiedenen Fundorten, Herr Dr. Lossen aus Berlin eine kleine Auswahl Sericitgesteine aus dem Taunus, Herr Ulrich von hier einige Hand-

stücke von der Brennerbahn und Herr Dr. Thomas in Ohrdruff Mühlsteinporphyre aus dem Thüringer Wald.

Der palaeontologische Theil der allgemeinen Sammlung wurde vermehrt um ein Exemplar des *Encrinus gracilis* L. v. B. aus Oberschlesien und einen schönen Stylolithen mit an einem Ende aufsitzendem *Pecten discites*, welche wir der k. Bergakademie zu Berlin verdanken. Herr Dr. Eck in Berlin schenkte eine schöne 36 Nummern umfassende Suite der in dem Diluvium von Tempelhof lose vorkommenden Petrefacten und Herr Professor Roth ebenda eine Anzahl Kreideversteinerungen aus Schonen, von Faxoe und aus den unteren Pläner von Gielow bei Malchin. Herr Pearson, derzeit hier, gab eine Anzahl Exemplare von *Spirifer arenosus* Conr. aus dem Oriskany-Sandstein von Union Springs, am Cayugasee (NY.), sowie von *Spirifer lynx* Ecchw., *Atrypa increbescens* Hall, *Protaraea vetusta* Hall sp., *Cyathophyllum sp.* und *Orthoceras sp.* aus dem Silur von Richmond (Ja.) Durch Herrn Professor F, Roemer in Breslau erhielten wir eine kleine Serie Versteinerungen aus dem Clymenienkalk von Ebersdorf i. Schl. Herr Geheime Ober-Medicinalrath Wöhler schenkte einen fossilen Fisch in schwefelhaltigem Mergel von Racalmuto bei Girgenti. Eine äusserst werthvolle Vermehrung erfuhr die Sammlung durch eine Anzahl Knochen von *Dicynodon* vom Cap, die Mr. und Mrs. Alexander Macdonald in London so gütig waren, unserm Museum zu verehren. Einen Zahn von *Ceratodus Kaupi* Ag. Beyr. und einen andern von *C. serratus* Ag. Beyr. beide von ausgezeichneter Schönheit schenkte Herr Dr. C. Klein zu Heidelberg. Den Herren

W. Endlich und v. Croustchoff in Stuttgart verdankte die Sammlung eine Serie von Fisch- und Saurierresten aus dem Bonebed von Rüdern, eine Auswahl von Versteinerungen aus dem schwäbischen Iura und einige seltene Vorkommen aus der süddeutschen Trias. Durch Herrn Prof. O. Fraas in Stuttgart erhielten wir ausser einer der geognostischen Abtheilung einverleibten Wurfschlacke von Heerhof im Ries ein schönes Exemplar des *Pemphix Sueurii* Desm. aus dem Muschelkalk von Obertürkheim, einen Gaumenzahn von ***Mastodousaurus Jaegeri*** Meyer aus der Lettenkohle von Gaildorf, einen guten Zahn von ***Ceratodus Kaupi*** von Hoheneck und ein Stück von der berühmten Moosbank an der Schussenquelle die durch ihre hochnordischen Formen (Bes. ***Hypnum sarmentosum*** Wahlbg.) so interessant ist. Eine reiche Suite Versteinerungen aus dem Rhaet der Umgegend von Eisenach, eine Anzahl Triasvorkommen von Sinsheim unweit Heidelberg und von Breitenbich bei Mühlhausen i. Thür. sammelte der Unterzeichnete. Von Interesse dürften die Muschelkalkconchylien von Breitenbich sein, da dieselben die feinsten Details des Schlosshaus in einer Schönheit erkennen lassen, die sie dem bekannten Vorkommen von Schwieberdingen ebenbürtig an die Seite stellt.

Angekauft worden ist eine aus 136 Arten bestehende Sammlung böhmischer Trilobiten von Herrn W. Fritsch in Prag. Dieselbe enthält unter vielen Arten, die nur in Bruchstücken vertreten sind, auch eine gute Zahl vollständiger Exemplare und dürfte, verbunden mit den älteren Vorräthen, eine für den Lehrzweck völlig ausreichende Uebersicht über diese für die Palaeontologie so wichtige Thier-Ordnung gewähren.

Ferner wurden von Herrn Brice Wright eine Anzahl ausgezeichnet schöner Crinoiden aus dem Wenlock von Dudley erworben. Eine Reihe anderer, zum Theil schon eingegangener, werthvoller Erwerbungen, werden, da sie erst aus dem Etat des nächsten Jahres bezahlt werden können, wohl besser in den Bericht über das Jahr 1870 besprochen werden.

Auch das Inventar der Sammlung ist in dem verflossenen Jahre vermehrt worden und habe ich hierbei vor allem dankend anzuerkennen, dass uns ein Glastischschrank zu 64 Schubladen aus dem Universitäts-Baufonds hergestellt wurde. Besonders vermisst wurde eine feine Wage, welche für petrographische Untersuchungen genaue specifische Gewichtsbestimmungen zuliess. Dieser Mangel ist ebenfalls in diesem Jahre durch die Anschaffung eine feinen Analysenwage abgestellt worden. Die Karten u. Bilder sind um eine geologische Karte von Krems und dem Manhardsberge von Czjzek, welche die Verwaltung der K. Universitäts-Bibliothek schenkte und 6 Photographien der Eruption von Santorin im Frühjahre 1866 von Constantinos in Athen aufgenommen, die der Unterzeichnete schenkte, vermehrt. Als eine äusserst werthvolle Erwerbung hat H. Prof. Sartorius von Waltershausen ein Exemplar seiner grossen Aetnakarte in Aussicht gestellt. Auch die kleine Hand-Bibliothek der Sammlung, in welche nur die wichtigsten Hand- und Nachschlagebücher, sowie die Arbeiten über die Geologie des nordwestlichen Deutschlands oder über in der Sammlung aufbewahrte Originale aufgenommen werden sollen, ist so weit dies thunlich war, erweitert worden.

Von Arbeiten in der Sammlung ist aus dem

verflossenen Jahre nur wenig zu melden, da einestheils die Einreihung der Land'grebeschen Sammlung viel Zeit in Anspruch nahm, andererseits der Mangel an einer ausreichenden Zahl von Schränken sehr hinderlich war. Trotzdem sind die fossilen Crustaceen neu durchgearbeitet und aufgestellt worden, wobei Herr Stud. Brackebusch die Jurasischen Krebse bestimmte, während die übrigen von dem unterzeichneten durchgesehen wurden. Die Crinoideen sind ebenfalls gemeinsam mit Herrn B. K. Emerson durchgearbeitet worden. H. Carmichael untersuchte eine Anzahl Tertiaer Conchylien aus dem Becken von Paris u. H. Dr. Schilling ordnete einen Theil der Harzgesteine.

Von ganz oder doch theilweise in der Sammlung ausgeführten Arbeiten zu Publicationen sind nur zu erwähnen:

B. K. Emerson über die Lias mulde von Markoldendorf.

H. Carmichal, über die basaltischen Gesteine in der Umgegend von Göttingen.

Dr. H. Schilling, über eine fossile Asteride aus dem oberem Jura von Hannover.

Derselbe, über ein Orthoklas Oligoklas Quarz Hornblende Gestein von Knudskirke auf Bornholm.

Dieselben dürften sämmtlich bald im Druck erscheinen.

Von auswärtigen Fachgenossen haben die Sammlung im verflossenen Jahre besucht und benutzt; H. Dr. K. von Fritsch in Frankfurt a. M., H. Dr. Cl. Schlüter in Bonn, H. Dr. Lossen in Berlin, H. Director Dr. von Groddeck in Clausthal, H. Bergassessor Giebelhausen in Halle, H. Professor Dr. Roth aus Berlin, H. Dr. D. Brauns in Braunschweig.

Sendungen zum Behuf wissenschaftlicher Arbeiten sind gemacht worden an H. Dr. Schlüter, H. Dr. Brauns u. H. Dr. A. Kunth in Berlin.

Schliesslich darf wohl noch darauf hingewiesen werden, wie dringend wünschenswerth die baldige Ausführung des von der Kgl. Regierung in Aussicht genommenen Neubaus eines naturhistorischen Museums auch für die geologisch-palaeontologische Sammlung ist, indem bei der leichten Bauart und der schweren Belastung des jetzigen Locals die grossen Glastischschränke fortwährend weichen.

K. v. Seebach.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Astronomische Beobachtungen auf der Sternwarte zu Bonn von Dr. W. A. Argelander. Bd. VII. Abth. II. Bonn 1869. 4.

E. Ehlers, über fossile Würmer aus dem lithographischen Schiefer in Bayern. Taf. XXXI—XXXVII. 4.

Sébastien Turbiglis, l'empire do la logique; essai d'un nouveau système de philosophie. Florence, Turin, Milon 1870. 8.

Dr. Gerh. v. Breuning, über Behandlung der Schusswunden mit Operationsvermeidung. Sendschreiben an an operirende Armeen und deren Aerzte. Wien 1869. 4.

Des Cloizeoux, mémoire sur la forme crystalline, les propriétés optiques et la composition chimique de la Gadolinite. Paris. 8.

— — nouvelles recherches cristallographiques et optiques sur la forme clinorhombique du Wolfram. Ebd. 8.

— — A. Lomy, études chimiques optiques et cristallographiques sur les sels de thalium. Ebd. 8.

Catalogus codicum latinorum bibliothecae regiae Monacencis, composuerunt Carolus Halm et Georgius Laubmann. T. 1. B. 1. Codices 1—2329 compleclens. Monachii 1868. 8.

Jacut's geographisches Wörterbuch, aus den Handschriften zu Berlin, St. Petersburg, Paris, London und Oxford, auf Kosten der deutschen morgenländischen Gesellschaft herausg. von F. Wüstenfeld. Bd. IV. Zweite Hälfte. Leipzig 1869. 8.

Mittheilungen aus dem naturwissenschaftlichen Vereine von Neu-Vorpommern und Rügen. Redigirt von Prof. v. Feilitsch, Prof. Limpricht und Dr. Marsson in Greifswald. Jahrg. 1. Berlin 1869. 8.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e scienze morali e politiche. Vol. XI.—II della serie III Fasc. II.

Classe di scienze matematiche e naturali. Vol. XI—II della serie III. Fasc II. Milano 1869. 4.

Rendiconti. Serie II Vol. II. Fasc. XI—XVI. Milano 1869. 8.

Atti della fondazione scientifica Cagnola. Vol. V. Parte 1—8.

Bulletin de la Société Imp. des Naturalistes de Moscou. Année 1868. Nr. 4. Moscou. 1869. 8.

Vargasia, boletin de la Sociedad de Ciencias Fisicas y Naturales de Carácas, N. 6. Carácas 1869. 8.

Annales de l'Observatoire R. de Bruxelles. (Bogen 11. 1869.)

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Philos. — histor. Classe. Bd. 60. Hft. 1. 2. 3. Jahrg. 1868. Bd. 61. Hft. 1. Jahrg. 1869. Wien 1869. 8.

Mathem.-naturw. Classe. Jahrg. 1868. Abth. 1. Nr. 6 u. 7, 8 u. 9, 10. Abth. II. Nr. 7, 8, 9, 10. — Jahrg. 1869. Abth. I. Nr. 1. 2. Abth. II. Nr. 1. 2. 3. Ebd. 1868. 69. 8.

Archiv für östreichische Geschichte. Bd. 40. Zweite Hälfte. Ebd. 1869. 8.

Fontes rerum austriacarum. Bd. 29. Abth. 2. Ebd. 1869. 8.

Register zu den Bänden 51—60 der Sitzungsberichte der philos. histor. Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. VI. Ebd. 1869. 8.

Tabulae codicum. Vol. III. Ebd. 1869. 8.

G. Tschermak, die Porphyrgesteine Oestreichs aus der mittleren geologischen Epoche. Ebd. 1869. 8.

Mittheilungen des historischen Vereines für Steiermark. Hft. XVII. Graz. 1869. 8.

Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. Jahrg. 6. Ebd. 1869. 8.

(Fortsetzung folgt.)

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

Januar 19. № 2. 1870.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 8. Januar.

Meissner, Mittheilung von Dr. Marmé über das Extractum Cynoglossi.

Clebsch, Ueber die Abbildung einer Classe von Flächen 5. Ordnung. (Erscheint in den Abhandlungen.)

Fittig, Weitere Untersuchungen über die Constitution der Piperinsäure.

Wöhler, über ein angebliches Meteoreisen.

Ueber die physiologische Wirkung des alkoholischen Extractes von Cynoglossum officinale L.

von

Dr. med. W. Marmé und stud. med. A. Creite.

Im März des verflossenen Jahres veröffentlichte J. Setschenow (Centralblatt f. d. med. Wiss. Nr. 14 S. 211) die Beobachtung des Dr. Diedülin zu Petersburg, dass „ein aus der frischen Pflanze bereitetes alkoholisches Extract von Cynoglossum officinale auf das Nervensystem der Wirbelthiere wie Curare wirke, indem es nur die peripherischen Enden der motorischen

Nerven paralysire.“ Setschenow selbst (a. a. O.) und später L. Hermann (Unters. z. Phys. d. Musk. u. Nerv. H. 3. S. 8) fanden die angegebene Wirkung auf das Nervensystem des Frosches bestätigt; beide Autoren hatten sich kleiner Proben des von Diedülin selbst dargestellten oder übersandten Extractes, dessen nähere Bereitungsweise unseres Wissens leider nirgends angegeben ist, zu ihren Experimenten bedient.

Die Wichtigkeit dieser Mittheilung nicht nur für Physiologie und Toxicologie, sondern für die experimentelle Untersuchungsmethode überhaupt veranlasste uns in der Absicht die Richtigkeit der Angabe auch an Säugethieren und Vögeln zu erproben zu einer grösseren Reihe von Experimenten, die wir mit Benutzung der verschiedensten Thiere im hiesigen physiologischen Institute anstellten und wobei wir uns zunächst auch alkoholischer Extracte, welche aus den einzelnen Pflanzentheilen bereitet waren, bedient haben.

Diese alkoholischen Extracte haben wir theils selbst dargestellt, indem wir im letzten Sommer von frischen, blühenden, sehr kräftigen Exemplaren von Cynogl. officin. L. die gut zerkleinerten Wurzeln für sich und ebenso das Kraut und im Herbst frische Früchte wiederholt mit starkem, heissem Alkohol auszogen, die vereinigten kalt filtrirten Auszüge bei möglichst gelinder Temperatur von Alkohol befreiten und den Rückstand erst auf dem Wasserbade, dann über Schwefelsäure eintrockneten; theils endlich von Herrn E. Hampe zu Blankenburg a. H. aus grossen Quantitäten Rohmaterial anfertigen lassen.

Die bis jetzt erlangten Resultate unserer Versuche erlauben wir uns hier in Kürze mitzutheilen.

1. Die aus den verschiedenen Pflanzentheilen in angegebener Weise bereiteten Extracte zeigen sämmtlich qualitativ keinen Unterschied in ihrer Wirkung, quantitativ überwiegt das aus der Wurzel gewonnene bei Weitem die übrigen.

2. Die von uns an Fröschen, Tauben, Hühnern, Hunden, Katzen, Kaninchen und Meerschweinchen nach den verschiedensten Methoden physiologischer Untersuchung beobachtete Wirkung stimmt durchaus nicht mit der bekannten des Curare-Giftes überein; sie ist vielmehr eine narkotische, ganz im Einklange mit den Angaben von Schriftstellern früherer Jahrhunderte (wie Boerhaave Ind. pl. q. i. hort. acad. Lugd. Bat. rep. T. I p. 275), so dass nach unseren Beobachtungen kein Grund vorliegt, ältere Berichte von tödlicher Vergiftung (bei Morison Pl. hist. univ. oxon. III. p, 450) als unrichtig zu bezeichnen.

Ausser dieser Wirkung auf die Nervencentra konnten wir ferner constatiren:

3. Dass die Erregbarkeit der motorischen und der sensiblen Nerven langsam herabgesetzt und dass auch die Muskelerregbarkeit allmählich, wenn auch erst sehr viel später vermindert wird.

Völlige Lähmung der motorischen Nerven konnten wir nur mit von uns selbst dargestelltem Extract bei Sommerfröschen erzielen, bei Winterfröschen dagegen wurde selbst wenn auf die äussere Haut applicirte mechanische und chemische Reize längst keine Reaction mehr hervorriefen und ähnlich bei Säugethieren und Vögeln nach Stillstand der Respiration und Circulation die electrische Reizung des isolirten N. Ischiadicus immer noch durch entsprechende

Muskelcontractionen beantwortet. Der schliessliche Erfolg war der nämliche, mochten grosse oder kleinere Dosen des Extracts angewandt, mochte die Vergiftung so geleitet werden, dass sie rasch oder erst nach längerer Zeit zum Tode führte, mochte das Gift per os oder subcutan applicirt sein. Ja bei Säugethieren trat dieselbe Wirkung zu Tage, auch wenn das alkoholische Extract in schwach angesäuertem Wasser aufgenommen, nach Bunsen's Methode rasch filtrirt und nun direct in die Blutbahn gebracht wurde. Gleichen Effect erreichten wir, einerlei ob wir das Gift hier so injicirten, dass es zunächst nach peripherischen Körpertheilen oder erst zum Herzen gelangen und von hier im Körper sich vertheilen musste.

4. Dass die Thätigkeit des muskulomotorischen, regulatorischen und excitirenden Herznervensystems zuerst etwas vermehrt dann vermindert wird. Die Verminderung geht nach Anwendung grosser Dosen in völlige Lähmung über. Das Herz steht meistens in Diastole still, während der Herzmuskel, wenn nicht enorme Dosen auf einmal einwirkten, durch Electricität noch reizbar ist.

5. Dass eine ähnliche Wirkung auf das vasomotorische Nervensystem zu Stande kommt.

6. Dass die Thätigkeit des Respirationscentrums herabgesetzt wird, leichter bei erhaltenen als bei durchschnittenen N. Vagi und bei Application grösserer Dosen bis zu vollständiger Apnoe.

7. Dass nach subcutaner Application sowie nach Einführung in den Magen oder in die Blutbahn eine beträchtliche Erweiterung der Pupille eintritt, lange bevor völlige Narcose ausgebildet

ist, dass diese Erweiterung aber nicht bei directer Application auf das Auge erfolgt.

8. Dass das Extract keine intensive örtliche Einwirkung auf die Magenschleimhaut ausübt.

9. Dass der Tod durch Lähmung des Respirationscentrums eintritt.

10. Dass das narcotisch wirkende Princip sich als ein chemisch wohl characterisirter, eigenthümlicher Körper isoliren lässt.

Den Gegensatz zwischen den Resultaten unserer Untersuchung und denen der oben genannten Experimentatoren vermögen wir nicht zu erklären. Am nächsten liegt die Annahme, dass die Bereitungsweise des Extracts Wirkungsunterschiede bedingt. Wenn aber auch wirklich in der frischen Pflanze ein vielleicht flüchtiger, nach Art des Curare wirkender Körper vorhanden sein sollte, was zu entscheiden uns zur Zeit unmöglich ist und wofür unsere Experimente nicht sprechen, so beweisen doch anderentheils diese letzteren unzweifelhaft, dass die verschiedenen Theile der frischen Pflanze ganz in Uebereinstimmung mit den Angaben älterer Autoren ein narcotisches Princip enthalten, das in grösseren Dosen auf die verschiedensten Thiere tödlich wirken kann. —

Dieses narcotische Princip ist von dem Einen von uns (M) bereits dargestellt; nähere Angaben hierüber sowie die ausführliche Mittheilung unserer Versuche behalten wir uns bis nach Feststellung einiger anderer Vergiftungsymptome für spätere Zeit vor.

Göttingen im November 1869.

Weitere Untersuchungen über die Constitution der Piperinsäure.

Von

Rudolph Fittig.

In der ersten Mittheilung über die Piperinsäure habe ich die Vermuthung ausgesprochen, dass die beiden Sauerstoffatome, welche diese Säure und ihre Oxydationsproducte Piperonal und Piperonylsäure ausserhalb der Gruppen COHO und CHO enthalten, chinonartig gebunden seien und dass dem Piperonal eine der beiden Formeln

$$C^6H^3\begin{cases}\ddot{O}^2\\ CH^2CHO\end{cases} \text{ oder } C^6H^2\begin{cases}\ddot{O}^2\\ CH^3\\ CHO\end{cases}$$

zukomme. Ich habe seitdem in Gemeinschaft mit Herrn Dr. I. Remsen diese Untersuchungen weiter fortgesetzt. Dabei kam es uns zunächst nur darauf an, die Constitution des Piperonals zu erforschen und Thatsachen zu sammeln, welche einen Schluss auf die Stellung der beiden erwähnten Sauerstoffatome gestatten. Wir haben zu dem Zwecke zuerst die Producte der Einwirkung von Wasserstoff im Entstehungszustande auf das Piperonal und die Piperonylsäure genauer studirt. Erwärmt man Piperonal mit Wasser und Natriumamalgam einige Stunden am Rückflusskühler, so entstehen drei wesentlich von einander verschiedene gut characterisirte, leicht von einander trennbare Verbindungen, nämlich Piperonylalkohol $C^8H^8O^3$ und zwei isomerische, dem Hydrobenzoïn analoge Verbindungen $C^{16}H^{14}O^6$ welche wir als Hydropiperoïn und Isohydropiperoïn bezeichnen wollen.

Der Piperonylalkohol $C^8H^8O^3$ bildet farblose bei 51° schmelzende Krystalle. Er ist

in Wasser schwer löslich, scheidet sich daraus flüssig ab und bleibt mit Wasser in Berührung auch nach längerem Stehen flüssig. In Alkohol löst er sich fast in jedem Verhältniss. Er ist nicht ohne Zersetzung flüchtig. Mit Chloracetyl liefert er unter Entwickelung von Salzsäure einen flüssigen Essigäther.

Das Hydropiperoïn $C^{16}H^{14}O^{6}$ ist in Wasser, selbst in siedendem fast ganz unlöslich und scheidet sich bei der Einwirkung von Natriumamalgam auf das Piperonal als ein graues amorphes Pulver auf der Oberfläche des Quecksilbers ab. Es ist in kaltem Alkohol fast unlöslich, in heissem schwer löslich und scheidet sich aus dieser Lösung nach dem Erkalten in harten, farblosen, zu Sternen gruppirten Spiessen ab, die bei 202⁰ schmelzen.

Das Isohydropiperoïn $C^{16}H^{14}O^{6}$ ist in kaltem Wasser ebenfalls fast unlöslich, aus siedendem aber lässt es sich umkrystallisiren. In Alkohol ist es leicht löslich und lässt sich deshalb durch Alkohol sehr leicht von der vorigen Verbindung trennen. Es krystallisirt in farblosen, weichen, meist büschelig oder astbestartig verwebten langen Nadeln, die zuerst bei 138⁰, einmal geschmolzen aber jedesmal wieder bei 135⁰ schmelzen.

Sehr merkwürdig ist das Verhalten des Hydropiperoïns und des Isohydropiperoïns gegen Chloracetyl. Auf die erstere Verbindung wirkt das Chloracetyl anfänglich gar nicht ein, aber nach längerem Stehen unter Chloracetyl geht sie in eine farblose Krystallmasse mit ganz anderen Eigenschaften über. Das Isohydropiperoïn dagegen löst sich in überschüssigem Chloracetyl leicht auf und nach einiger Zeit scheiden sich aus dieser Lösung sehr schön ausgebildete, harte

farblose und durchsichtige Prismen aus. In beiden Fällen findet keine Entwickelung von Salzsäure statt und die entstandenen Verbindungen, welche in beiden Fällen dieselben Eigenschaften besitzen und augenscheinlich identisch sind, sind nicht, wie man vermuthen sollte, die Essigäther dieser alkoholartigen Körper, sondern das Chlorid $C^{14}H^{12}O^{4}Cl^{2}$. Die Einwirkung des Chloracetyls erfolgt nach der Gleichung

$$\left.\begin{matrix} C^7H^5O^2CH(HO) \\ C^7H^5O^2CH(HO) \end{matrix}\right\} + 2C^2H^3O,Cl = \left\{\begin{matrix} C^7H^5O^2CHCl \\ C^7H^5O^2CHCl \end{matrix}\right. + 2C^2H^3OHO$$

Diese Reaction ist vergleichbar der Einwirkung der Chloride des Phosphors auf die Alkohole. Sie ist vielleicht eine allgemeine für diese ganze Körpergruppe, ja vielleicht für alle Alkohole, welche die Gruppe CH(HO) enthalten d. i. für alle secundären Alkohole.[1])

Das Hydropiperoïnchlorid ist in Wasser und Alkohol bei gewöhnlicher Temperatur, wie bei Siedhitze so gut wie unlöslich. Durch längeres Kochen mit Wasser wird es unter Bildung von Salzsäure zersetzt. Es färbt sich bei 150° schwach gelb, schmilzt bei 198°, zersetzt sich unmittelbar nach dem Schmelzen unter Gasentwickelung und geht in eine dickflüssige bräunlich

---

[1]) Herr Ammann ist auf meine Veranlassung damit beschäftigt, die Einwirkung von Chloracetyl auf das Hydrobenzoïn und andere secundäre Alkohole zu untersuchen. Dabei hat sich zunächst ergeben, dass alle bisherigen Angaben über die Einwirkung von Natriumamalgam auf das Bittermandelöl ungenau sind. Es entsteht dabei nämlich nicht eine Verbindung, sondern ein schwierig trennbares Gemenge von zwei, sehr schön krystallisirenden Körpern, von denen der eine, in Wasser leichter lösliche bei 131,°5 schmilzt und offenbar identisch mit dem Hydrobenzoïn von Zinin ist, der andere, in Wasser schwerer lösliche aber schon bei 118° schmilzt.

gelbe, beim Erkalten nicht wieder erstarrende Masse über.

Auch gegen concentrirte Salpetersäure verhalten sich die beiden Hydropiperoïne ganz gleich. Sie lösen sich beim Erwärmen darin auf und aus dieser Lösung scheidet sich beim Eintragen in Wasser eine hellgelbe krystallinische Masse ab, welche Mononitropiperonal $C^8H^5(NO^2)O^3$ ist. Aus den beiden isomeren Körpern entsteht dieselbe Nitroverbindung und diese wird gleichfalls erhalten, wenn man das Piperonal oder den Piperonylalkohol in derselben Weise mit Salpetersäure von 1,39 spec. Gewicht behandelt. Das Mononitropiperonal krystallisirt aus Wasser in langen farblosen Nadeln, die sich am Lichte sehr rasch goldgelb färben. Es ist in kaltem Wasser fast unlöslich, in heissem Wasser und in Alkohol leicht löslich. Sein Schmelzpunkt liegt bei 95,°5.

Ausser den beschriebenen drei Verbindungen entsteht bei der Einwirkung von Natriumamalgam noch eine sehr kleine Menge einer anderen Substanz, welche in der alkalischen Flüssigkeit gelöst bleibt und dieser erst nach dem Ansäuern durch Schütteln mit Aether entzogen werden kann. Beim Abdestilliren des Aethers bleibt sie als eine bräunliche, harzige, in Alkalien lösliche, durch Kohlensäure aus dieser Lösung wieder fällbare Masse zurück. Wir haben diesen seiner Quantität nach als unwesentliches Nebenproduct auftretenden Körper nicht in reinem Zustande erhalten können.

Das Piperonal verhält sich demnach gegen Wasserstoff im status nascendi genau so wie das Bittermandelöl und das Anisaldehyd. Die beiden ausser der Gruppe CHO darin enthaltenen Sauerstoffatome werden dadurch nicht an-

gegriffen und nicht in Hydroxyl verwandelt. Dasselbe Resultat erhielten wir, als wir Wasserstoff im Entstehungszustand auf die Piperonylsäure einwirken lassen wollten. Wir haben die Lösung der Säure wochenlang mit Natriumamalgam bei Siedhitze behandelt, sowohl ohne das Alkali abzustumpfen als auch unter sehr häufigem Neutralisiren der alkalischen Flüssigkeit; immer aber blieb fast die ganze Menge der Piperonylsäure unangegriffen und es bildeten sich höchstens Spuren einer in heissem Wasser leicht löslichen und ein sehr leicht lösliches Calciumsalz gebenden Säure, die wir nicht einmal in einer zur Analyse hinreichenden Quantität erhalten konnten.

Diese Versuche machen es sehr unwahrscheinlich, dass die beiden Sauerstoffatome wie im Chinon gebunden sind.

Einwirkung von Phosphorchlorid auf das Piperonal.

Gleiche Molecüle Piperonal und Phosphorchlorid wirken nach der Gleichung

$$C^7H^5O^2-CHO+PCl^5=C^7H^5O^2-CHCl^2+PCl^3O$$

auf einander ein. Die Reaction erfolgt bei gewöhnlicher Temperatur und verläuft glatt und ohne Entwickelung von Salzsäure. Das Piperonalchlorid ist flüssig, siedet bei 230—240°, zersetzt sich bei der Destillation aber grösstentheils und wird durch Wasser schon bei gewöhnlicher Temperatur langsam wieder in Piperonal verwandelt.

In der Hoffnung Aufschluss über die Stellung der beiden anderen Sauerstoffatome zu erhalten, brachten wir 1 Mol. Piperonal mit etwas mehr als 3 Mol. Phosphorchlorid zusammen. Bei gewöhnlicher Temperatur findet auch unter diesen Verhältnissen nur die obige Zer-

setzung statt und das überschüssige Phosphorchlorid bleibt unangegriffen. Beim Erwärmen aber beginnt die Einwirkung von Neuem, das Phosphorchlorid verschwindet rasch, es entwickelt sich Salzsäure und es destillirt zuerst eine grosse Menge von Phosphorchlorür, dann Phosphoroxychlorid über. In der Retorte bleibt eine farblose oder schwach gelblich gefärbte Flüssigkeit, welche beim Erkalten nur dickflüssig wird, aber nicht erstarrt und bei ungefähr 280° unter theilweiser Zersetzung siedet. Diese Verbindung ist Dichlorpiperonalchlorid $C^7H^3Cl^2O^2$—$CHCl^2$. Das Phosphorchlorid lässt demnach die beiden ausserhalb der Gruppe CHO befindlichen Sauerstoffatome unverändert und wirkt wie freies Chlor substituirend. An feuchter Luft und in Berührung mit Wasser zersetzt sich das Dichlorpiperonalchlorid rasch in Dichlorpiperonal und Salzsäure. Das Dichlorpiperonal $C^7H^3Cl^2O^2$—CHO ist ein fester, in kaltem Wasser unlöslicher, in Alkohol und Toluol leicht löslicher Körper. Aus Toluol krystallisirt es in farblosen Nadeln. Am schönsten erhält man es, wenn man die durch Zersetzung des Chlorids mit kaltem Wasser erhaltene feste Masse in wenig absoluten Alkohols löst und zu dieser Lösung in der Kälte so lange Wasser tröpfelt, bis die Ausscheidung beginnt. Nach wenig Augenblicken erfüllt sich dann die Flüssigkeit mit langen, glänzenden, vollständig farblosen Nadeln. Es schmilzt bei 90°.

Eine sehr interessante Zersetzung erleidet das Dichlorpiperonal beim Kochen mit Wasser oder beim Erhitzen mit Wasser in zugeschmolzenen Röhren auf 100°. Es löst sich dann ziemlich rasch auf unter Entwickelung von Kohlensäure, Abgabe seines ganzen Chlorgehaltes in Form von Salzsäure und Bildung eines neuen

Körpers von der Zusammensetzung $C^7H^6O^3$. Die Reaction verläuft ganz glatt und ohne dass secundäre Producte auftreten nach der Gleichung

$$C^8H^4Cl^2O^3 + 2H^2O = C^7H^6O^3 + CO^2 + 2HCl.$$

Die neue Verbindung $C^7H^6O^3$ ist in Wasser leicht löslich und krystallisirt aus der auf ein kleines Volumen verdunsteten Lösung in schönen, meist concentrisch vereinigten glänzenden, flachen Krystallen, die man am besten durch einmaliges Umkrystallisiren aus Toluol reinigt. Sie schmilzt bei 150°, färbt sich bei dieser Temperatur dunkel und zersetzt sich bei stärkerem Erhitzen unter Abscheidung von Kohle. Sie ist isomerisch mit der Salicylsäure, Oxybenzoësäure und Paraoxybenzoësäure, aber sie ist keine Säure. Allerdings reagirt die wässrige Lösung sauer, aber aus der mit einem grossen Ueberschuss von kohlensaurem Natrium versetzten Lösung wird die Verbindung, wenngleich etwas schwieriger als aus der wässerigen Lösung, durch Schütteln mit Aether in freiem Zustande ausgezogen. Ihre Bildung und ihre Eigenschaften machen es so gut wie unzweifelhaft, dass sie die Gruppe CHO vom Piperonal noch enthält und dass sie als das Aldehyd der Protocatechusäure $C^6H^3\left\{\begin{matrix}HO\\HO\\CHO\end{matrix}\right.$ anzusehen ist. Ihre wässrige Lösung färbt sich auf Zusatz von Eisenchlorid intensiv und sehr rein grün und diese Farbe wird durch einen Tropfen Sodalösung in Roth verwandelt. Das ist dieselbe Reaction, welche die Protocatechusäure characterisirt, nur färbt sich die Lösung dieser Säure mit Eisenchlorid nicht so rein grün, wie die des Aldehyds, sondern etwas mehr blaugrün. Für die neue Verbindung ist diese Reaction so ausserordent-

lich empfindlich, dass sich mit Hülfe derselben noch kaum sichtbare Spuren mit grosser Schärfe erkennen lassen. — Bei der Oxydation mit schmelzendem Kalihydrat geht der neue Körper ohne Bildung secundärer Producte einfach in Protocatechusäure über, die wir sehr leicht in völlig reinem Zustande erhielten. Auch übermangansaures Kalium scheint ihn zu Protocatechusäure zu oxydiren, jedoch ist wegen der leichten Oxydirbarkeit der Säure selbst unter diesen Verhältnissen die Reaction weniger glatt. Aus einer ammoniakalischen Silberlösung scheidet der neue Körper einen Silberspiegel ab, aber mit sauren schwefligsauren Alkalien konnten wir eine krystallisirende Verbindung nicht erhalten. Eine Verbindung scheint sich jedoch zu bilden, denn der Lösung in saurem schwefligsauren Natrium wird durch Schütteln mit Aether der Körper nicht wieder entzogen. Wahrscheinlich ist die Verbindung nur leicht löslich.

Einwirkung von Wasser und Salzsäure auf die Piperonylsäure. Eine in hohem Grade auffällige Zersetzung erleidet die Piperonylsäure, wenn man sie mit verdünnter Salzsäure in zugeschmolzenen Röhren auf 160—200° erhitzt. Es scheidet sich dann eine schwarze Masse ab, die im Wesentlichen aus freiem Kohlenstoff besteht und die davon abfiltrirte, fast ganz farblose Lösung liefert beim Verdunsten je nach der Temperatur, auf welche man erhitzt hat, entweder Protocatechusäure oder Brenzcatechin. Bei 160—170°, bei welcher Temperatur die Zersetzung nur sehr langsam stattfindet, entsteht fast ausschliesslich Protocatechusäure und in den Röhren ist dann beim Oeffnen kein Druck bemerkbar, hat man aber auf 190—200° erhitzt, so entweicht beim Oeffnen Kohlen-

säure und die Lösung enthält nur Brenzcatechin. Dieselbe Zersetzung in freie Kohle, Kohlensäure und Brenzcatechin erfolgt beim Erhitzen der Piperonylsäure mit reinem Wasser auf etwa 250°. Man wird diese Reactionen durch die Gleichungen

$$C^8H^6O^4 = C^7H^6O^4 + C$$

Piperonylsäure   Protocatechusäure

und $$C^8H^6O^4 = C^6H^6O^2 + C + CO^2$$

Brenzcatechin

ausdrücken müssen, aber natürlich muss dabei gleichzeitig eine moleculare Umlagerung stattfinden und die Reactionen sind nicht so glatt, wie die Gleichungen vermuthen lassen. Allerdings konnten wir in den vom Kohlenstoff abfiltrirten Lösungen keine andere Körper als Protocatechusäure resp. Brenzcatechin auffinden, aber die Ausbeute an diesen Körpern bleibt immer erheblich hinter der theoretischen Menge zurück.

Wir werden an einem anderen Orte ausführlich die Schlüsse entwickeln, welche diese Versuche hinsichtlich der Constitution des Piperonals und der Piperonylsäure gestatten. Hier wollen wir nur noch erwähnen, dass uns die früher ausgesprochene Vermuthung, dass die beiden Sauerstoffatome, wie im Chinon gebunden seien, nach diesen neuen Resultaten als unhaltbar erscheint, dass alle Zersetzungen aber eine ziemlich einfache Erklärung finden, wenn man das Piperonal als nach der Formel $C^6H^5 — O — CO — CHO$ constituirt betrachtet. Namentlich ist dann die so glatt verlaufende Umwandlung des Dichlorpiperonals in das Aldehyd der Protocatechusäure sehr leicht verständlich:

$$C^6H^3\begin{cases}Cl\\Cl\\O - CO - CHO\end{cases} + 2H^2O =$$
Dichlorpiperonal

$$C^6H^3\begin{cases}HO\\HO\\CHO\end{cases} + CO^2 + 2ClH$$
Aldehyd der Protocatechusäure.

Ueber das angebliche Meteoreisen von der Collina di Brianza.

Im vorigen Jahrhundert wurde im Mailändischen auf der Collina di Brianza eine Eisenmasse von 200—300 Pfund gefunden, die 1813 zuerst von Chladni in seinem Werk über die Feuermeteore S. 349 in dem Abschnitt von den problematischen Gediegen-Eisenmassen genau beschrieben worden ist. In der Gegend des Fundorts befinden sich keine Anzeichen, weder von Eisenhütten noch von Eisengruben, und ihre ursprüngliche Herkunft ist noch bis heute räthselhaft. Indessen kann es keinem Zweifel unterliegen, dass sie ein Hüttenproduct und nicht meteorischen Ursprungs ist. Mehrere Analytiker, darunter Klaproth*), fanden darin weder Nickel noch Phosphor; auch gibt sie beim Aetzen nicht die den meisten Meteoreisen eigenthümlichen Figuren. Während sie nun schon längst nicht mehr als Meteoreisen betrachtet wird, ist kürzlich von Dr. Haushofer**), angeblich

---

*) Schweiger's Journal V. 4.
**) Erdmann's Journal CVII. 328.

von dieser Eisenmasse, eine Analyse bekannt gemacht worden, nach welcher sie 7,7 Proc. Nickel, 0,2 Kobalt und 0,3 Phosphor enthalten und auch beim Aetzen die Figuren zeigen soll.

Dieser auffallende Widerspruch veranlasste mich, die Analyse dieses Eisens mit einem Fragment von einem Stück wiederholen zu lassen, welches aus der Blumenbach'schen Sammlung stammt und mit einer Etiquette von Chladni's Hand versehen ist. Es fand sich darin keine Spur von Nickel oder Kobalt, auch zeigte es beim Aetzen keine Figuren, sondern nur das gewöhnliche krystallinische Gefüge des Stabeisens. Um volle Gewissheit zu erlangen, ersuchte ich Prof. Rose die in der Berliner Sammlung befindlichen acht Stücke dieses Eisens, die aus der Verlassenschaft von Chladni stammen, mir zur Ansicht zu schicken. In zwei von diesen Stücken, von denen das eine eine Etiquette von Chladni's Hand hatte, wurde ebenfalls keine Spur von Nickel oder Kobalt gefunden, und keines von ihnen gab die Figuren. An einem Stück ist ausserdem deutlich eingeschmolzne Schlacke zu bemerken.

An der Richtigkeit der Analyse des Dr. Haushofer ist nicht zu zweifeln; aber was er analysirte, war offenbar nicht das Eisen von der Collina di Brianza, sondern ein wirkliches Meteoreisen, welches mit einer falschen Etiquette versehen war.

W.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

Februar 9. №. 3. 1870.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. Februar.

Ewald, Entzifferung der jüngst entdeckten 60 Phönikischen Inschriften.
Clebsch, Mittheilung eines Aufsatzes von S. Lie über die Reciprocitätsverhältnisse des Reyeschen Complexes.
Fittig, über das Tetramethylbenzol.
Enneper, über eine Erweiterung des Begriffs von Parallelflächen.

Entzifferung der jüngst entdeckten 60 Phönikischen Inschriften.

Von

H. Ewald.

Zu den drei grossen Phönikischen Inschriften von Sidon Massilia und Karthago sind zwar in den lezten Jahren keine gleich grosse hinzuentdeckt: die Entdeckungen kleinerer haben aber auch in der neuesten Zeit ihren Fortgang gehabt. In der Decembersitzung der K. Ges. der Wissenschaften vom J. 1866 veröffentlichte ich wennauch nur mit Hebräischen Buchstaben eine in Spanien entdeckte, und gab eine Erklärung von ihr zu welcher vor Kurzem ein Nachtrag

erschien*). Im vorigen Jahre aber hat sich besonders der Freiherr H. v. Maltzan das Verdienst erworben von den ihm während seiner Reisen in Tunis zugänglich gewordenen Karthagischen Inschriften eine bedeutende Anzahl zu veröffentlichen**). Es sind zusammen 60: sie alle entstammen den neuesten Nachgrabungen auf dem weiten Trümmerfelde des alten Karthago, und die Anzahl dieser neuesten Entdeckungen auf demselben ist noch viel grösser. Nachdem jenes Trümmerfeld seit den lezten 20 bis 30 Jahren von gelehrten Christen viel erforscht und seinem Boden so vielerlei Alterthümer entlockt sind, hat dieser gelehrte Eifer Karthagische Inschriften und andere Alterthümer ihm durch mühevolle Nachgrabungen zu entführen endlich auch einen Muslim ergriffen, einen Sohn des durch Herrn v. Maltzan's Reisen unter uns bekannt geworden ersten Ministers des Fürsten (Bey) von Tunis. Diesem fehlte es weder an bequemer Musse noch an Hülfsmitteln aller Art sich für diesen Zweck nüzlich zu machen: und jeden Falls ist es eine denkwürdige Erscheinung dass heute ein reicher Muslim in Afrika in einen so ernstlich gemeinten Wetteifer mit unsern eigensten wissenschaftlichen Bemühungen

*) in den Gel. Anz. 1870 S. 72 ff.

**) Man sehe darüber das Nähere in der besondern Abhandlung welche dem ersten Bande der Reise in den Regentschaften Tunis und Tripolis Lpz. 1870 angehängt ist. Man findet hier die Abbilder von 59 Inschriften: das Abbild einer 60sten gab Herr v. Maltzan schon früher mit einigen Bemerkungen in seiner Reise auf der Insel Sardinien Lpz. 1870 S. 583—586: über diese ist unten besonders die Rede, da sie in ganz anderer Weise veröffentlicht ist. Ueber die Verdienste des Herrn v. Maltzan selbst rede ich bei seinem Reisewerke weiter in den Gel. Anz.

eintritt. Da dieser Muslim indessen seine gesammelten Schäze schwerlich bald veröffentlichen wird und diese ausserdem, wie Herr v. Maltzan erzählt, in nicht sehr sicheren Händen ruhen, so kann man unserm Landsmann danken dass er wenigstens eine Auswahl von ihnen nicht ohne grosse Mühe jetzt für den wissenschaftlichen Gebrauch mittheilt. Da nun in Deutschland eine genauere Erkenntniss Phönikischer Schrift und Sprache eben in ihrem schwierigen völligen Aufbaue begriffen ist und es sich sehr verlohnt bei jeder wichtigeren Entdeckung und Veröffentlichung neuen Stoffes wohl zuzusehen wie diese Wissenschaft mit Sicherheit weiter wachse, so möge hier kurz gezeigt werden was aus der zuverlässigeren Entzifferung dieser Inschriften zu lernen sei.

Phönikische Inschriften sollten nun zwar immer vermittelst der Kunst so vollkommen zuverlässig veröffentlicht werden wie die 1863 auf Kosten des British Museum erschienenen ein schönes Beispiel davon geben: denn zuviel kommt bei ihnenauf den kleinsten und feinsten Zug jedes Buchstabens und auf das Mass der Erhaltung oder der Verstümmelung jeder Zeile und jedes Zuges einer Inschrift an. Herr v. Maltzan der dieses sehr wohl begriff, wollte daher von allen ganz genaue Lichtbilder geben: allein das wurde trotz aller seiner eifrigsten wiederholten Bemühungen durch Muslimische Eifersucht verhindert. Doch versichert er sonst mit aller möglichen Sorgfalt die hier auf ein Mal erscheinenden 59 Inschriften wiedergegeben zu haben *): und wie dieses der Augenschein im All-

*) einige dieser Inschriften wurden von dem oben genannten Muslimischen Entdecker und Besitzer auf die Pariser Ausstellung vom J. 1867 gesandt und prang-

gemeinen bestätigt, so unternehmen wir nur im Vertrauen auf diese Zuverlässigkeit der uns vorliegenden Abbilder die folgende Entzifferung, welche sich übrigens der Kürze wegen nur auf das heute noch schwierigere und doch zugleich wissenschaftlich wichtigere erstrecken soll. — Wir müssen jedoch bemerken dass 32, 3 und 33, 1 eine ganze Zeile in den Abbildern ausgelassen ist, wie man aus den Hebräischen Umschreibungen des Herrn Herausgebers schliessen kann.

Manche dieser Inschriften sind leider ziemlich verstümmelt: obgleich der Herausgeber aus einer noch viel grösseren Menge von Steinen welche ihm vorlag nur die besser erhaltenen oder sonst denkwürdigeren ausgewählt zu haben versichert. Die Phönikische Schrift welche hier erscheint, ist auf einigen der Steine noch ziemlich alterthümlich: auf anderen neigt sie sich schon in einzelnen Zügen zu der Neupunischen. Dies erklärt sich wenn die Inschriften sämmtlich aus den letzten Jahrhunderten vor der Zerstörung Karthago's sind: und da es unter ihnen an allen Neupunischen fehlt, so erblickt man hier den plötzlichen Abbruch aller Phönikischen Bildung mit dieser Zerstörung auf das Lebendigste vor sich. Man sieht hier die Karthagischen Tempel an deren Wänden diese und alle die vielen tausend ähnliche Inschriften verewigt wurden, wie in plötzliche Trümmer zerfallend:

ten dort unter den Tuniser Beiträgen. Danach wurden sie zwar im Journal asiatique 1868 II und 1869 I von den Herren Léon Rodet und dem bekannten Archäologen Longpérier veröffentlicht und erläutert: allein sie erscheinen nach Herrn v. Maltzan's Versicherung hier noch zuverlässiger.

so furchtbar muss auch nach diesem Zeugnisse die Römische Zerstörung gewesen seyn.

Unter allen diesen 59 oder 60 ist nämlich nur die 43ste eine Grabinschrift: alle übrigen sind Dankinschriften: und ihre grosse Aehnlichkeit unter einander auch in der Fassung der Rede bezeugt hinreichend dass sie alle in dem oder den Tempeln desselben Doppelgottes ihre Stelle fanden. Da nun ihre eigenthümliche Art aus den früheren Veröffentlichungen und Entzifferungen hier als genug bekannt vorausgesetzt werden kann, so beschränken wir uns auf eine Ergänzung ihrer Entzifferung nach den drei Seiten hin auf welche es bei ihnen vorzüglich ankommt.

1. Alle diese 59 Inschriften richten den Dank der Frommen an die Doppelgottheit deren zwei Namen als רבת חנת פן בעל und בעל ארן חמֹן stets an ihrer Spitze erscheinen müssen. Es sind zwei Götter, die Tanit und der Baal-Chaman: allein beide stehen in einer so unzertrennlichen Gemeinschaft und die Tanit ist dabei sosehr allein vorherrschend, steht auch so nothwendig immer voran, dass es nicht auffällt wenn nachher die Rede nur von ihr allein ist und gesagt wird sie habe die Stimme des Gelobenden gehört ihn segend. Dabei heisst die Tanit immer רַבַּת, der Chaman immer בעל: und da alle diese Inschriften offenbar immer von den bei dem Tempel angestellten. Schriftführern ausgingen und sich nur in den gleichmässigsten geheiligten Redensarten und Wendungen bewegen, so ist es nur eine seltsame Ausnahme wenn jene Vornamen in der 26ten fehlen oder die Tanit in der 46ten gar nachgestellt wird. So konnten nur ausnahmsweise ungeschickte Prie-

ster verfahren; und diese höchst geringen Ausnahmen haben gar keine Bedeutung.

In der Redensart פן בעל welche stets hinter dem Namen der Tanit als ein Beiname dieser erscheint, steht 25, 1 ein Mal פנא בעל: dieses ist jedoch zugleich mit der richtigen Deutung des Beinamens der Göttin schon in der Abh. über die grosse Karthagische Inschrift (Gött. 1864) S. 25 f. hinreichend erläutert. Wir können dies nicht zu den Schreibfehlern rechnen: es verdeutlicht nur ebenso wie die ebenfalls vorkommende Schreibart פאנא die bestimmtere Aussprache des Wortes.

Die nächste Redensart womit die Nennung des Gelobenden und Opfernden beginnt, ist bekanntlich immer אש נדר, welche in jener Abh. S. 43 erläutert wurde. Immer aber ist es nur ein einzelner welcher als der Gelobende in der Inschrift genannt wird: dieses ist wohl zu beachten; und wie der Grund davon sich aus den Gesetzen jenes Tempels leicht erklärt, so kann uns diese Gewissheit vor allerlei unrichtigen Entzifferungen bewahren. Man darf danach z. B. 47, 3 f. nicht ובנא lesen, als wäre der Sinn Baalshillék Sohn Muttunalonim's (vgl. über diesen Namen unten) und sein Sohn seien die Gelobenden: vielmehr ist auch nach den Schriftzügen dort ־ן בן אעבח oder nach 66, 5 bei N. Davis noch wahrscheinlicher אטבח zu lesen: Sohnes A'bach's; ein Mannesname אעבח ist wenigstens nicht undenkbar, da er nach bekannten Lautübergängen aus אצבח oder אטבח entstanden seyn könnte. — Doch ist wohl möglich dass einer für den anderen etwas gelobe, wie aus der 42sten bei N. Davis sich folgern lässt.

Oft aber wird ein Weib als die Gelobende genannt, entweder als בת Tochter von..., in

welchem Falle wir sie noch als Jungfrau zu denken haben, oder als אשת Weib von . . .; auf letzteren Fall kommt 23, 3 und עשת 33, 1; denn dass in diesen Inschriften bisweilen schon nach Neupunischer Weise ע für א geschrieben wird, ergibt sich auch aus auderen Beispielen wie ערן 20, 2, עמחבעל für אמחבעל 29, 3. Wir ersehen nun auch aus allen diesen Inschriften dass der weibliche Sinn sich in jener Redensart alsdann durch נדרא ausdrückte 24, 3. 27, 3 f. 29, 3. 38, 3. 39, 3. 46, 3. 53, 3; und wechselt damit נדרע 9, 3 f. 13, 3. 17, 3. 48, 2, so ist das nach dem eben zuvor gesagten nicht auffallend. Wechselt aber auch נָדַר damit, wie aus 10, 3. 11, 3. 23, 2 f. 54, 3. 57, 3 sich ergibt, so erklärt sich das einfach aus dem LB. §. 316 *a* erklärten Sprachgesetze welches ursprünglich für alles Semitische galt. Ausserdem aber ist hier keine Möglichkeit denkbar: und eine Schreibart נדרעא welche man als für diesen Fall denkbar angenommen hat, bestätigt sich weder durch die Gesetze der Schrift, noch findet sie sich wirklich irgendwo. Sie könnte höchstens durch einen Schreibfehler ein Mal erscheinen: allein die einzelnen Fälle welche man für ein נדרעא annehmen wollte, zeigen näher betrachtet nicht einmal einen Schreibfehler auf. In solchen Grunddingen aber muss die von uns zu gründende Wissenschaft Phönikischer Sprache und Schrift heute endlich ganz sicher werden, wenn sie wirkliche Fortschritte machen und ihren Nutzen stiften soll.

Auch in diesen Inschriften wechselt mit נָדַר selten נָשָׂא 20, 4. 52, 2 welches unserm Darbringen und lat. *offerre* im Opfersinne entspricht; dieses ist in der Abh. über die grosse Karthagische Inschrift S. 31 erläutert, und da-

nach könnte man auch die Ueberschrift der Opfertafeln בעת המשאתת als 'Verkauf (oder Preis) der Opferabgaben' übersetzen.

2. Die Eigennamen der Menschen welche alsdann auf diese Redensart folgen und das Einzige ausmachen was bei jeder Inschrift sich anders gestalten muss, wollen wir hier nicht in ihrer unendlichen Menge vorführen. Genügen mögen hier einige allgemeine Bemerkungen!

Zunächst ist es nicht ohne Nuzen wohl zu beachten in welcher Begleitung und Folge ein solcher Eigenname erscheine. Möglich ist dass der Name des Mannes oder des Weibes allein erscheine: allein dann wird doch dem kurzen Namen immer der des Vaters oder des Ehemannes hinzugefügt, wie 18. 22. 24. 38. 42. 48. 55. 57; ob jemals der ganz einfache Name hinreiche, ist zweifelhaft, da die Inschrift 52 hinten unvollständig ist. Doch läugnen wir nicht die Möglichkeit davon: haben wir doch in der 59ten das Beispiel eines Mannes der sich nur nach seiner entfernten Vaterstadt Sidon nennen lässt; denn dies scheinen uns die hier zu lesenden Buchstaben עש מחזת אשצרן zu bedeuten 'ein Mann des Stadtgebietes von Sidon' *). Jedenfalls waren aber alle welche sich so einfach be-

*) עש für אש Mann macht nach Obigem keine Schwierigkeit; das weibliche מחזת aber kann dem Aramäischen מְחוֹזָא ܡܚܘܙܐ entsprechen welches vgl. mit حاز einen eingeschlossenen Ort, eine Stadt oder Stadtgebiet bedeuten kann; dies Wort ist im Syrischen selten geworden, vgl. Assemâni's Bibl. or. III. 1 p. 506 und dichterisch in Knôs' chrest. p. 101, 14. 105, 2. Das Zeichen ס 59, 4 kann den Schluss anzeigen, wie ähnlich die Zeichen | ⳩ am Ende der 5ten.

zeichnen entweder sehr bescheidene oder vielmehr gemeine Leute, welche nicht viel auf Geschlecht und Abstammung gaben. In den meisten Inschriften wird dagegen das Geschlecht durch zwei oder noch mehrere Glieder zurückverfolgt. Wir bemerken hier aber (weil man es leicht verkennen könnte) dass zwischen zwei solchen aufsteigenden Vätergliedern das Wörtchen בן Sohn auch schon bisweilen ausgelassen wird: wir haben dieses schon früher bei anderen Inschriften so gefunden; hier bestätigt es sich 4, 4. 32, 5 f. 51, 4; und ähnliche Abkürzungen reissen überall leicht ein.

Uebersehen wir aber alle die Eigennamen welche auf diesen Inschriften an den Tag treten, so finden wir unter den uns jetzt aus den früher entdeckten wohl bekannten doch auch wieder nicht wenige neue, welche unsre Kenntnisse auszudehnen mannichfaltig dienen können. Wir vermögen nun auch immer sicherer einzusehen was im Gebiete Phönikischer Eigennamen möglich oder unmöglich sei: wenn man z. B. meint das erste Glied eines zusammengesetzten Phönikischen Eigennamens könne auch aus einem Wörtchen מת *meth* bestehen, so stellt sich das näher betrachtet als grundlos dar: 9, 4 ist אֲמַתְמִלקרת als weiblicher Eigennamen zu lesen; 12, 3 ist zwar מתמלקרת herzustellen, dieses aber als מַתַּמִּלְקַרְתְּ auszusprechen, da das schliessende *n* von מַתַּן sich leicht in das folgende *m* auflösen konnte. Noch wichtiger wird dies wenn wir zugleich die Frage über das Verhältniss zwischen den Phönikischen und den Hebräischen Eigennamen hieher ziehen. Man sollte nach allen den genaueren geschichtlichen und sprachlichen Erkenntnissen welche wir jetzt bereits gewonnen haben nicht vermuthen dass noch

heute irgendein Gelehrter die Ansicht aufstellen würde die Hebräer und die Phöniken seien ganz anders als es schon die ältesten Erzählungen melden dasselbe Volk; woraus dann weiter folgen würde dass die geschichtlichen Erinnerungen der Bibel keinen Glauben verdienen. Dennoch ist dies in der neuesten Zeit wieder geschehen. Die Sache ist aber diese, dass die Hebräischen Eigennamen in ihrer Einzelheit und in ihrer Zusammensezung den Phönikischen zwar nach einigen Seiten hin vielfach gleichen, nach anderen und gerade den geschichtlich ammeisten entscheidenden Seiten hin gänzlich von ihnen abweichen; jenes erklärt sich aus dem gemeinsamen Semitischen Ursprunge und den engeren Berührungen welche alsdann zwischen beiden Völkern so lange bestanden, dieses aus der übrigens gänzlich verschiedenen Abstammung und ältesten Geschichte beider. Und gerade nach diesen Rücksichten hin ist es wol nützlich einiges genauer zu erläutern wozu uns diese 60 Inschriften die nächste Veranlassung bieten.

Einfache Eigennamen sind im Phönikischen noch möglich: und gerade sie sind meist am wenigsten Hebräisch. Sie können sich weiblich bilden, wie ארשת 53, 3 (ein Name der auch 13, 3 herzustellen ist) neben ארש, עלשת neben עלשי 30, 2. Die Aussprache des letzteren kann uns noch die Lateinische *Elissa* andeuten; die des ersteren kennen wir noch nicht genau.

Die meisten Eigennamen sind aber zusammengesetzte: und gleichen sie darin den Hebräischen weit mehr als den Arabischen, so gibt es doch auch wichtige Beziehungen in denen sie von jenen ganz abweichen. So fehlen im Phönikischen gänzlich die mit *abi-*, beinahe

völlig auch die mit *achi-* gebildeten, welche im Hebräischen gerade von seiner ältesten Zeit her so vorherrschend sind und den ältesten Haus- oder Familiensinn dieses Volkes so stark bezeichnen. Grundlos ist die Lesart אביתר (als wäre es der Hebräische Name Abjathar oder Ebjathar) in der 36.; die ganz abgerissenen Buchstaben jener Inschrift führen auf eine בַּת בַּשְׁאֲרְיָתָר, wenn auch ein solcher Vatername uns noch nicht weiter vorgekommen ist. Nur der Name חמלך 19, 3f. 40, 3f. 41, 1. 45, 3 (wenn nicht auch das sonstige חמלך dahin gehört) oder vielmehr חמלכת dessen Aussprache Himilcat wir aus dem *Himilco* erschliessen können, ist aus אחימלכת verkürzt, wie sich aus dem entsprechenden Falle des weiblichen חתמלכת in der 41. bei Davis ergibt. — Eine besondere Frage ist hier ob das Phönikische auch wie das Hebräische (LB. S. 675 der achten Ausgabe) Eigennamen habe welche mit עַם zusammengesetzt sind und die in so merkwürdiger Weise den Griechischen mit δῆμος zusammengesetzten gleichen. Wir finden aber wenigstens einen Namen welcher allen Zeichen zufolge hieher gehört: עמסעם 14, 5. 35, 3f. Da nämlich das עָמַס tragen, erhalten auch in der Zusammensetzung mit einem Gottesnamen sich häufig zeigt, wie אשמנעמס *Eshmûn-âmas* 8, 4. 16, 3, so kann man es sicher auch in einer Zusammensetzung עמסעם wiedererkennen; denn ob eines der zwei Glieder eines zusammengesetzten Eigennamens voranstehe oder nicht, ist nach dem uns jetzt bekannten Gesetze der Phönikisch-Hebräischen Namenbildung gleichgültig (LB. S. 675 ff.), während das Arabische eine solche höhere Freiheit in dieser Bildung überhaupt nicht besitzt.

Doch die mit Gottesnamen zusammengesetzten wurden offenbar allmälig neben den ganz einfachen allein die beliebtesten; und mancher der scheinbar einfachen wie מתן *Muttun* sind deutlich selbst erst wieder aus solchen verkürzt, wie im Hebräischen נָתָן aus יְלנָתָן oder vielmehr aus נְתַנְיָה. Hier erschliesst sich uns nun die überreiche Fülle der Phönikischen grösseren oder kleineren Götter und Götternamen immer vollständiger, und wir müssten über diese Fülle wahrhaft staunen wenn sie sich nicht aus der eigenthümlichen Religion dieses Volkes hinreichend erklärte. Der *Sanchûn* von welchem Sanchuniothon den Namen hat, erscheint auch hier 9, 6. 11, 5 in der damals vielbeliebten Zusammensetzung גֵּרסכן *Sanchûnsgast*, wie sich überhaupt die Phöniken solchen Eigennamen zufolge gerne als Gäste ihrer Götter betrachteten; dasselbe erscheint in dem Arabischen جار الله wieder, widerstrebte aber dem Hebräischen Gefühle, da man den mit גֵּרְשׁוֹן wechselnden uralten Namen גֵּרְשֹׁם trotz des Wortspieles Ex. 2, 22 schwerlich dahin ziehen wird. Die נַעֲמָה welche der Unterz. einst aus Gen. 4, 22 als eine Altkanaanäische Halbgöttin erschloss und mit der *Giddeneme* bei Plautus verglich, erscheint auch hier 24, 4. 34, 4 als גדנם wie schon für גרנעם geschrieben wird (vgl. בדשתרת 23, 4. 34, 3 f. *Bodostor* für בדעש׳); und die Verschiedenheit der Schriftzüge bezeugt hinreichend dass das erste Glied hier nicht wieder wie dort גֵּר lautet. Der aus Jes. 37, 38 bekannte אַדְרַמֶּלֶךְ, aus הֲדַרְךָ מ׳ zusammengewachsen, erscheint 3, 4 sicher genug. Der צָפֹן d. i. *Typhon* zeigt sich als solcher in der Zusammensetzung בעל צפן 52, 2. 54, 3 und noch unverkennbarer in dem עבדצפן 57, 4 f.;

und man wird nun umso weniger den Ursprung des Ortsnamens בַּעַל צְפֹן Num. 33, 6 an der Aegyptischen Grenze verkennen. Aber wir zweifeln nicht auch den aus Griechischen und Römischen Schriftstellern bekannten *Abdalonymus* *) in dem **) בדארנם 14, 3 und dem verstümmelten מתנאלונם 46, 3 wiederzufinden; wenn sodann dafür 47, 3 מתנאלמן geschrieben wird, so ist das nur so wie in Griechischen und Römischen Büchern Abdalominus leicht mit Abdalonimus wechselt; oder wenn in der Inschrift von Umm elʿavâmid Z. 1. 2 עבדאלים steht, so wäre auch in ihm nur nach einem sichern Lautgesetze ***) das *j* aus *n* erweicht. — Zweifelhafter ist der Name עוף in בעלעוף 8, 3 vgl. 18, 3: er müsste עֲוֹף ausgesprochen werden, könnte so in עף 18, 3 übergehen, und würde auf einen Gott der Augurien hinweisen. Desto denkwürdiger ist dass nach 31, 1f. sogar von dem ächtesten Namen des Schöpfers aus ein Mannesname מתן הברא gebildet wurde.

Eine denkwürdige, aber aus LB. S. 678 f. erklärbare Erscheinung ist dass das Phönikische bei zusammengesetzten Eigennamen das weibliche durch keine Endung unterscheidet. Doch reicht diese einreissende Erstarrung der Sprache in ihm noch nicht so weit dass nicht als erstes Glied der Zusammensetzung wo ein Weib gemeint ist ־אֲמַת für ־עֶבֶד und (wie oben gezeigt) ־חִת für ־חִ gewählt würde. Wir ziehen dahin auch den Eigennamen אמתרִיבִי in der schon oben besprochenen 33, 1, indem wir in

*) über den Sinn dieses Wortes alonim ist in der Abh. über die grosse Sidonische Inschrift S. 16 gehandelt.

**) der letzte Buchstab ist allerdings etwas zweifelhaft.

***) LB. §. 52a; dass diese Möglichkeit im Phönikischen am weitesten reichte, zeigt יִתֵּן für יִתֵּן.

Raibi ein nach bekannten Semitischen Sprachgesetzen aus רַבְּתִי gebildetes Zärtlichkeitswort finden und es so von dem oben erwähnten Vornamen der Göttin Tanith ebenso ableiten wie in עבדארן 42, 1 und ähnlichen Zusammensetzungen unter dem Baal gewiss der Baal-Chamôn gemeint ist. Geschichtlich ist allerdings merkwürdig dass mit diesem Gottesnamen Chamôn so wenige Eigennamen gebildet werden; doch hat sich die wahrscheinlich ursprüngliche Aussprache desselben in dem Mannesnamen חרמןיתן 51, 3 erhalten *).

Mag jedoch der Eigenname des Gelobenden kürzer oder länger gefasst sein, immer erscheint er fast ohne Ausnahme ohne weitere Zusätze und sonstige Bemerkungen. Möglich sind solche allerdings: in diesen jüngst entdeckten Inschriften finden sich aber nur folgende Ausnahmen. In der 32. wird der Name des Gelobenden bis zum dritten Vorvater zurückgeleitet: und der Urgrossvater trägt zwar im bezeichnenden Gegensatze zu seinen Nachkommen den ganz einfachen Namen עַכְבָּר, welcher dem Hebräischen עַכְבּוֹר entsprechend auch sonst vorkommt, er wird aber in durchaus eigenthümlicher Weise durch den Zusatz עבד בת צדתנת מלכת ausgezeichnet. Wir setzen nämlich vorne ein ע hinzu, wie dieses der an dieser Stelle etwas verstümmelte Stein erlaubt. Diese Worte bedeuten „Sklav der Tochter der Königin Ssâd-tanit“ oder „Ssada-tanîth“, indem letzteres ein nach ächt Phönikischer Art zusammengesetzter Eigenname ist welcher „den auf die Göttin

*) vgl. die Alterthümer des Volkes Israel S. 301 vgl. mit Palmyr. Ox. 1. An dem Buchstaben für ר fehlt nur der innere Strich: das Wort selbst kann schwerlich anders gelesen werden.

Tanith achtenden“ bedeuten kann *). Wir müssen uns demnach denken der Gründer dieses Geschlechts sei ein reich gewordener Sklave dieser Tochter einer Königin gewesen, dessen Andenken von seinen Nachkommen immer hochgehalten wurde: dieses ist denkbar, obgleich wir bis jetzt nicht wissen wo diese Königin lebte; vielleicht in Tyrus, von wo das Geschlecht nach Karthago auswanderte. — In der 35. Z. 4 stehen hinter dem Namen „Arish Sohn Bodbaal's Sohnes 'Amas'am's“ (denn so ergänzt man am richtigsten die Lesarten des links verstümmelten Steines) die Buchstaben קרת ח wiederum mit der Lücke links. Dass diese in ganz ungewöhnlicher Weise erscheinenden Buchstaben mit קרת חדשא d. i. *Karthago* ergänzt werden müssen, ist leicht zu sehen: sie können aber auch ohne weitere Ortsbezeichnung

*) Unser College Herr Prof. Brugsch zeigte mir letzten Sommer eine bedeutende Reihe Phönikischer und Kyprischer Inschriften die er in Aegypten an den alten Denkmälern gefunden und abgezeichnet, und deren Veröffentlichung durch mich er wünschte. Die Sache wurde nur damals durch seine plötzliche Abreise verhindert und ich konnte jene Inschriften nur auf einige Augenblicke einsehen. Soviel ich mich jetzt erinnere, gehören sie zu der Art der Reise- oder Pilgerinschriften, von welchen jetzt schon so manche in sehr verschiedenen Sprachen und aus vielerlei Oertern bekannt geworden. Sie bestehen also meist nur aus Eigennamen: aber die Phönikischen Zeichen sind eigenthümlich und scheinen mir höheren Alters zu sein. Einige von ihnen welche durch Hrn. Th. Devéria nach Paris kamen, sind im Journ. as. 1868 I. auf 2 Platten veröffentlicht. Dort nun findet man unter VIII einen צדירתן בן גרצר: und nach diesen Zusammensetzungen wäre צר eher der Name einer Gottheit; man könnte dann an den Ἀλιεύς Sanchun. p. 18 Or. denken und den Namen dann am richtigsten צֵר aussprechen.

sehr wohl *zu Karthago* bedeuten*); und dass irgend einer der vielen Gelobenden wünschte dass er in der Inschrift als zu Karthago wohnend bezeichnet werde, ist ebenso wohl denkbar. — Diese ungewöhnlichen Zusätze machen uns also zuletzt keine Schwierigkeit.

Eine besondere Frage ist aber noch ob auf diesen 60 Inschriften sich ein Eigenname finde der nicht Phönikischen sondern Berberischen Ursprunges ist. Auf den Neupunischen Inschriften haben wir allerdings solche schon lange entdeckt: Herr v. Maltzan meint nun in der 44. der hier veröffentlichten nicht Neupunischen Z. 3 f. den Namen *Micipsa* zu finden, indem er מספנסכא liest und nur vermuthet dass in diesen doch ziemlich abweichenden Lauten jener Name liege. Allein diese Annahme leidet schon dadurch dass dann die folgenden Buchstaben חרץ keinen Sinn geben: wir können dieses kurz behaupten, da jeder Versuch sie auf diesem Wege zu entziffern misslingt. Lesen wir die Worte aber מספר בן סכאחרץ *Mispar sohn Sanchuachraß'es,* so setzt sich die Bezeichnung des Eigennamens nur in gewohnter Weise fort. Wir lesen nicht מסכר, weil uns die Züge des dritten Buchstabens hier und 2, 6 ein פ zu geben scheinen; nach diesem halten wir die Buchstaben בר am Ende der Zeile für verwischt. Alsdann scheint uns das *n* von סכן in der Mitte des zusammengesetzten Eigennamens nur ebenso ausgestossen zu sein wie bei dem S. 41 erwähnten.

3. Am Schlusse der Inschriften steht bekanntlich die zu dem ersten Worte zurückkehrende Redensart כשמע קלא ברכא weil sie

*) nach LB. §. 281 d.

(die Tanith) seine (oder ihre) Stimme hörte ihn segnend, sodass mit Letzterem auch im Zustandsatze הברכא oder dafür (indem der Unterschied des Geschlechts immer mehr verschwindet) יברכא wechselt. Diese für die Wortbildung des Phönikischen so bezeichnenden Worte, welche deutlich zeugen wie stumpf die Endungen der Phönikischen Wörter allmälig zum grossen Unterschiede vom Hebräischen wurden, sind von dem Unterz. in der Abh. über die grosse Karthagische Inschrift erläutert; und wenn in der 28. קלי mit קלא wechselt, so ist auch das dort genug erläutert. Aber unsre Inschriften beweisen auch wie die priesterlichen Schreiber eben diese Schlussredensart, weil sie sich immer gleichbleibt und dazu allmälig als selbstverständlich galt, immer mehr fast in jeder Weise abzukürzen, ja sehr oft ganz auszulassen sich gewöhnten.

Aber unsre 37. Z. 3 f., die einzige welche ausserdem noch schwer zu entziffernde Worte enthält, bestätigt auch auf überraschende Weise das in jener Abh. S. 35 über die 66. bei N. Davis gesagte. Ganz ungewöhnlich nämlich ändert sich hier die Schlussredensart so: הרב מ קלא לם מחרח עתת „O Herrin! mögest du seine Stimme doch hören aus der Last der Zeiten! ihn rettend", ganz nach der Satzverbindung Ps. 22, 22b. Das תרח kann leicht mit מֶרַח oder טֹרַח Last, Beschwerde wechseln; das מ ist aus חשמע abgekürzt, und das לם ist das ächt Phönikische Wörtchen für nämlich, welches sich so einschaltet wenn man den Gedanken anführen will den ein anderer oder den man selbst hat (LB. S. 701). Dass das ם in diesem לם etwas sehr abgekürzt geschrieben wird, findet sich auch sonst, wie 1,

3 und 58, 4: denn dass an letzterer Stelle der Eigenname nicht נתן sondern מתן zu lesen sei, ist dem Kenner des Phönikischen als Sprache und Schrift nicht zweifelhaft.

— Hiermit ist so ziemlich alles erschöpft was bei der Entzifferung dieser Inschriften entweder schwierig oder sonst der Aufmerksamkeit würdig ist. Alle diese vielen Hunderte von Inschriften desselben Tempels oder doch derselben Gottverehrung haben deutlich unter sich die grösste Aehnlichkeit, und wurden ihrer Menge wegen von den priesterlichen Kunstschreibern oft ziemlich nachlässig verfertigt. Sogar deutliche Schreibfehler mischten sich hier und da ein, wie 49, 3 בתעשתרת für 'ברע steht, indem der Schreiber auch durch das vorangehende בת Tochter sich leichter verleiten liess. Was dagegen in den Abbildern des Hrn. v. Maltzan die beiden oberen Buchstaben 56, 3 und die Striche 39, 3f. sollen, ist uns unverständlich. — Eine stärkere Abweichung von der so gleichmässigen Art dieser Inschriften würde sich dagegen in dér Inschrift zeigen welche Hr. v. Maltzan in seiner früher erschienenen Reise auf der Insel Sardinien S. 585 mittheilt: allein da er selbst sagt er habe diese von dem Muslimischen Besitzer übel bedrängt nur in äusserster Eile abgezeichnet ohne auch nur ihre letzte Zeile mittheilen zu können, so haben wir den gerechten Verdacht dass sie anders als die 59 nicht zuverlässig genug vorliegt, würden sie jedoch vorläufig so zu lesen vorschlagen:

לרבת לתנת פן בעל ו
לאדן לבעל חמן אש נד
ר עזבעל בן חנא בן עז
ר בעל בן בעליתן כשמ ל

. . . .

Eine Uebersetzung aber derselben halten wir nach dieser Verdeutlichung nicht für nöthig, da sie sich aus alle dem was über diese Inschriften schon richtig gesagt ist vonselbst ergiebt. Wir schliessen daher mit dem Wunsche dass man endlich diesen bedeutenden Zweig Phönikischer Inschriften für in allen Hauptsachen jetzt vollkommen gesichert betrachten und nach dieser sichern Erkenntniss künftig verfahren möge.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

(Man bittet, diese Verzeichnisse vom 1. Januar 1870 an zugleich als Empfangsanzeigen für die der K. Societät in Tausch übersandten Werke betrachten zu wollen).

C. Jordan, traité des substitutions et des équations algébriques. Paris. 1870. 8.
Der zoologische Garten. Zeitschrift etc. X. Jahrgang. 1869. Nr. 7—12. Frankfurt a. M. 1869. 8.
Transactions of the Linnean Society of London. Vol. 26. Parts 2 u. 3. London. 1868. 69. 4.
Journal of the Linnean Society. Zoology. Nr. 43—46.
— — Botany. Nr. 48—51. und Vol. XII. London. 1868. 69. 8.
Proceedings of the Linnean Society of London. Session 1868—69. 8.
List of the Linnean Society of London. 1868. Ebd. 8.
W. Wackernagel, Johann Fischart von Strassburg und Basels Antheil an ihm. Basel. 1870. 8.

Februar 1870.

Commission hydromêtrique et des Orages. 1867. 24e année. 1868. 25e année. Lyon. 8.
Comptes-rendus des séances de la commission perma-

nente de l'Association Géodésique Internationale pour la mésure des degrès en Europe, tenues à Florence en 1869. Neuchatel. 1869. 4.

A. J. Angström, recherches sur le spectre solaire. Upsal. 1868. 4.

Nova Acta Regiae Societatis scientiarum Upsaliensis. Serie III. Vol. VII. Fasc. I. 1869. Upsalae. 1869. 4.

Onderzoekingen gedaan in het physiologisch laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool. 2de reeks. Deel I. II. 1867—69. Utrecht. 1867-69. 8.

P. Niemeyer, Handbuch der theoretischen und clinischen Percussion und Auscultation vom historischen und critischen Standpuncte bearbeitet. Bd. II. Abth. I. Erlangen. 1870. 8.

Monatsbericht der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. November. 1869. Berlin. 1869. 8.

Annales de l'observatoire Royal de Bruxelles. (Bogen 12. 1869.

Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. XI. Part. II. Cambridge. 1869. 4. With Index to Vol. X.

Società Reale di Napoli. Atti dell' Accademia di Scienze morali e politiche. Vol. IV. Napoli. 1869. 4.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

Februar 16. №. 4. 1870.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber die Reciprocitäts-Verhältnisse des Reye'schen Complexes.

von

Sophus Lie.

Vorgelegt von A. Clebsch.

1. Herr Reye hat in seiner „Geometrie der Lage" [1]) den ausgezeichneten Linien-Complex zweiten Grades näher untersucht, der gegenüber dem allgemeinen Complexe desselben Grades dadurch characterisirt ist, dass seine Singularitätenfläche in ein Tetraeder ausgeartet ist. Dieser Complex — den ich im Folgenden kurz als den Reye'schen Complex bezeichnen werde — scheint ein ganz besonderes Interesse zu verdienen. Die nachstehend mitgetheilten Eigenschaften desselben bezeichnen eine der Untersuchungs-Richtungen, welche man an denselben anknüpfen kann. Ich bin bei ihrer Auffindung zunächst von Vorstellungen über die Repräsentation zweier complexer Veränderlicher im Raume

1) Hannover. Carl Rümpler 1868.

ausgegangen, die ich an anderem Orte entwickelt habe[1]).

Das Doppelverhältniss der vier Punkte, in denen eine gerade Linie die Seitenflächen eines Tetraeders schneidet ist gleich dem Doppelverhältnisse der in derselben Reihenfolge genommenen Ebenen, welche sich durch die gerade Linie und die Eckpunkte des Tetraeders hindurch legen lassen. Man kann hiernach von einem Doppelverhältnisse einer geraden Linie gegen ein Tetraeder sprechen. In dieser Bezeichnung lässt sich der Reye'sche Complex definiren als die Gesammtheit der geraden Linien, welche ein gegebenes Tetraeder nach constantem Doppelverhältnisse schneiden[2]). Hieraus geht hervor, dass ein Reye'scher Complex unverändert bleibt durch die dreifach unendliche Anzahl homographischer Transformationen, welche sein Fundamental-Tetraeder unverändert lassen. Ich will diese Transformationen die dem Complexe zugehörigen homographischen Transformationen nennen. Bei einer jeden solchen Transformation vertauschen sich die Linien des Complexes unter sich, und zwar ist dieses Vertauschen im Allgemeinen ein gegenseitiges.

Es giebt nun eine ganze Reihe reciproker Transformationen, durch welche der Complex, in einer gewissen Auffassung, in sich selbst übergeführt wird. Als reciprok bezeichne ich dabei eine jede Transformation, welche zweimal hinter einander angewandt zu dem ursprünglichen Gebilde zurückführt. Von diesen Transformationen werden im Folgenden nur diejeni-

1) „Ueber die Repräsentation des Imaginären der Plangeometrie." Verh. d. Akad. d. Wiss. zu Christiania 1869. —

2) Cf. Müller, Math. Annalen Bd. I. p. 414.

gen betrachtet, welche eindeutig sind; und zwar soll untersucht werden, wie sich diesen Transformationen gegenüber die Curven verhalten, welche von Linien des Complexes umhüllt werden, oder, was im Allgemeinen auf dasselbe hinauskommt, die Developpabeln, welche von ihnen gebildet werden.

2. Ich bezeichne allgemein eine jede continuirliche Aufeinanderfolge von Complexlinien, bei der jede folgende die vorangehende schneidet, als Complex-Curve. Unter diesen Begriff fallen sonach auch die von Complexlinien umhüllten ebenen Curven und die von ihnen gebildeten Kegelflächen. Ich werde die ersteren die Ebenen, die letzteren die Punkte des Complexes nennen.

Durch eine jede dem Complexe zugehörige homographische Transformation wird eine beliebig angenommene Complex-Curve in eine andere übergeführt. Hiernach gruppiren sich die Complex-Curven zusammen zu Schaaren von jedesmal dreifach unendlich vielen. Eine jede solche Schaar nenne ich eine Gattung von Complex-Curven. Eine beliebig gewählte Complex-Curve kann in jede andere derselben Gattung durch eine und nur eine dem Complexe zugehörige homographische Transformation übergeführt werden.

Von Complex-Curven dritter Ordnung giebt es zwei Gattungen; die Curven der ersten Gattung enthalten die vier Eckpunkte, die der zweiten Gattung osculiren die vier Seitenflächen des Fundamental-Tetraeders.

Ich kann nun als Element des Reye'schen Complexes nicht nur die gerade Linie, sondern eine beliebige Complex-Curve auffassen. Der Complex ist dann die Gesammtheit

aller der gewählten Gattung angehörigen Complex-Curven. Bei dieser Anschauungsweise müssen die dem Complexe angehörigen geraden Linien auch als eine besondere Gattung von Complex-Curven gedacht werden, deren einzelne man sich durch zweckmässige Bewegung einer beliebigen anderen Complex-Curve, beispielsweise eines Punktes beschrieben denken kann.

Die Bezeichnung aller aufgeführten Gebilde als Complex-Curven entspricht dem dualistischen Character, der diesen Untersuchungen eigen ist, nicht. Indess mag einstweilen diese Benennung genügen.

Ich sage von zwei Complex-Curven, dass sie sich berühren, wenn sie einen Punkt und in diesem eine Tangente gemein haben. Denn ist auch die Osculations-Ebene in diesem Punkte für beide dieselbe. Man kann diese Definition leicht so umformen, dass sie auch für den Fall gilt, wo für die Complex-Curve ein Punkt oder eine Ebene des Complexes gewählt ist.

In jedem Punkte einer gegebenen Complex-Curve berührt von einer jeden anderen Gattung von Complex-Curven (mindestens) eine. Wenn sich der Berührungspunkt auf der gegebenen Complex-Curve fortbewegt, so geht die berührende Complex-Curve der gewählten Gattung continuirlich in eine andere über. Ich bezeichne dies als ein Rollen der beweglichen Curve auf der festen.

3. Als ein einfaches Beispiel für die gleich allgemeiner zu betrachtenden Transformationen und die sich anknüpfenden Fragen schicke ich das Folgende voraus. Unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Coordi-

naten hinsichtlich des Fundamental-Tetraeders verstanden, definiren die Gleichungen:

$$\alpha\alpha^1 = A,\ \beta\beta^1 = B,\ \gamma\gamma^1 = C,\ \delta\delta^1 = D$$

eine bekannte reciproke Punktransformation, durch welche z. B. eine Ebene in eine Fläche dritter Ordnung mit vier in die Ecken des Fundamentaltetraeders fallenden Doppelpunkten übergeführt wird. Ich will eine solche Transformation eine p- Transformation nennen. Eine gerade Linie geht durch dieselbe über in eine Curve dritter Ordnung, welche die vier Ecken des Tetraeders enthält. Dabei wird eine Complex-Gerade eine Complex-Curve dieser Gattung. Hieraus folgt, dass eine beliebige Complex-Curve in eine neue Complex-Curve verwandelt wird. Es ordnen sich also, insofern A, B, C, D constant sind, die Complex-Curven paarweise zusammen; lässt man A, B, C, D variiren, so erhält man eine Zuordnung der Gattungen von Complex-Curven unter sich. Und man übersieht, dass man, wenn zwei Curven aus zwei p- reciproken Gattungen gegeben sind, jedesmal A, B, C, D so bestimmen kann, dass die beiden Curven in einander übergeführt werden.

Da es von jeder Gattung Complex-Curven dreifach unendlich viele giebt, so bestimmen die durch einen festen Punkt hindurchgehenden Complex-Curven einer bestimmten Gattung eine Fläche. Man kann nun eine solche p- Transformation anwenden, dass der feste Punkt in einen beliebigen Punkt dieser Fläche übergeführt wird. Dabei geht die Complex-Curve, welche beide Punkte verband, in ihre p- reciproke über, die offenbar wieder beide Punkte enthält. Mit anderen Worten: Dieselbe Fläche, welche von den durch einen festen

Punkt hindurchgehenden Complex-Curven einer bestimmten Gattung erzeugt wird, wird auch erzeugt von den durch denselben Punkt hindurchgehenden Curven der p-reciproken Gattung.

Beispielsweise enthält ein Complexkegel das System der durch seine Spitze hindurchgehenden Complex-Curven dritter Ordnung erster Gattung.

Aus den vorstehenden Betrachtungen folgt noch, dass eine Fläche von der hier betrachteten Art durch die p-Transformation, welche den angenommenen festen Punkt unverändert lässt, in sich selbst übergeführt wird. Dieser Bemerkung analoge kann man auch bei den folgenden Transformationen hinzufügen, was im vorliegenden Aufsatze, der Kürze wegen nicht geschehen ist.

4. Als fundamentale reciproke Umformungen, durch deren Combination sich alle anderen ableiten lassen, die hier betrachtet werden sollen, wähle ich die folgenden zwei. Die erste — ich will sie die g-Transformation nennen — führt eine gerade Linie des Complexes in eine eben solche gerade Linie über. Sie wird vermittelt durch irgend eine der dreifach unendlich vielen Flächen zweiten Grades, für welche das dem Complexe angehörige Fundamentaltetraeder ein sich selbst conjugirtes ist. Als g-reciprok bezeichne ich die conjugirten Polaren hinsichtlich einer solchen Fläche und auch die von solchen conjugirten Polaren erzeugten Complex-Curven. — Die zweite Art von Transformation — sie soll die r-Transformation heissen — führt einen Punkt in eine Complex-Gerade über. Einem jeden Punkte entsprechen hinsichtlich zweier beliebiger der eben genannten Flächen zweiten

Grades zwei Polarebenen. Die Durchschnittslinie derselben gehört einem Reye'schen Complexe und bei passender Wahl der beiden Flächen dem gegebenen Complexe an und soll als die dem Punkte zugeordnete betrachtet werden [1]). Eine beliebige Complex-Curve, mag man sie als Punkt- oder als Linien-Gebilde auffassen, geht durch diese Transformation in dieselbe neue Complex-Curve über, die ich die ihr r-reciproke nenne. Auch von diesen r-Transformationen gibt es eine dreifach unendliche Anzahl.

5. Ich bezeichne allgemein eine gegebene Complex-Curve mit k, ihre g-reciproke mit k_g, hre r-reciproke mit k_r.

Es gibt eine dreifach unendliche Anzahl von g-Transformationen und von r-Transformationen. Man kann also durch eine g-Transformation zwei beliebige Complexlinien, durch eine r-Transformation einen beliebigen Punkt und eine beliebige Complexlinie einander zuordnen. Hiernach erhält man durch eine ganz ähnliche Ueberlegung wie die in der 3. Nummer angewandte die nachstehenden beiden Sätze:

Berühren zwei Complexgerade eine Complex-Curve k, so berühren sie auch eine Complex-Curve k_g.

Gehören ein gegebener Punkt und eine gegebene Complexgerade einer Complex-Curve k an, so sind sie auch Punkt und Tangente einer k_r.

1) Diese Art der Verwandtschaft hat bereits Reye in seinem eben citirten Werke eingehend untersucht. Sie ist identisch mit der von mir a. a. O. untersuchten Verwandtschaft der I. Polaren.

Aus dem ersten Satze kann man schliessen, dass die Congruenz, welche durch die Tangenten einer auf einer Complexgeraden rollenden k erzeugt wird, identisch ist mit der Congruenz der Tangenten der auf derselben Complex-Geraden rollenden k_g. Die Congruenz hat die beiden bez. von den k und den k_g erzeugten Flächen zu Brennflächen. An den zweiten Satz knüpfen wir die folgenden beiden Theoreme:

Eine auf einer gegebenen Complexgeraden rollende k erzeugt dieselbe Fläche wie eine auf derselben Complex-Geraden rollende k_r.

Das Tangentensystem aller durch einen festen Punkt hindurchgehenden k ist identisch mit dem Tangentensysteme der durch denselben Punkt gehenden k_r. Man kennt also für die fragliche Congruenz die beiden Brennflächen.

Beispielsweise wird nach dem ersten der beiden vorstehenden Theoreme eine Plücker'sche Complexfläche, deren Leitlinie dem Complexe angehört, auch durch die Curven dritter Ordnung erster Gattung erzeugt, welche die Leitlinie berühren. Zugleich folgt hieraus, dass eine solche Fläche durch p- Transformation in die Developpable einer Curve dritter Ordnung erster Gattung übergeführt wird.

6. Sei wieder k eine gegebene Complex-Curve. Ich forme dieselbe zunächst durch eine g- Transformation, dann durch eine r- Transformation um. So erhalte ich eine Curve, die ich mit k_{gr} bezeichne. Die Transformation, durch welche k unmittelbar in k_{gr} übergeführt wird, nenne ich eine gr-Transformation. So weitergehend spreche ich von Curven $k_{grgr...}$ und von

Transformationen *grgr*..., wobei mit demselben Buchstaben *g* oder *r* nicht sowohl eine Transformation mit denselben Constanten als vielmehr nur eine Transformation derselben Art bezeichnet sein soll. In der hier gewählten Bezeichnung tritt die in der 3. Nummer betrachtete *p*-Transformation als *rgr*–Transformation auf.

Alle Transformationen, deren Symbol mit demselben Buchstaben anfängt und schliesst, sind reciproke, was unmittelbar daraus folgt, dass *g* und *r* reciproke Transformationen sind und man also in dem Symbole einer aus ihnen zusammengesetzten Transformation zwei gleichlautende auf einander folgende Buchstaben ohne Weiteres weglassen kann. Die Zahl der willkürlichen Constanten, welche eine solche Transformation enthält, ist, wie bei den früheren Transformationen, gleich drei.

Dies vorausgesezt betrachte ich die folgende unendliche Reihe von Curven-Gattungen in welcher unter *C* die geraden Linien des Complexes verstanden sein sollen, und deren Elemente ich mit einem beigesezten Index bezeichnet habe:

0	c	c_g	0
— 1	c_{gr}	c_{grg}	+ 1
— 2	c_{grgr}	c_{grgrg}	+ 2
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Alle in dieser Reihe aufgeführten Gattungen sind bis auf die beiden ersten mit dem gleichen Index Q bezeichneten von einander verschieden. Ich werde eine der Reihe angehörige Curve vom Index *a* im Nächstfolgenden kurz eine Curve *a* nennen.

7. Wendet man auf die in der vorstehenden Reihe enthaltenen Complex-Curven eine beliebige reciproke Transformation *rgr* ... oder *grg* ... an, so geht eine jede der Gattungen in eine andere derselben Reihe über, deren Index zu dem der gegebenen addirt einer Constanten gleich ist, welche die reciproke Transformation characterisirt.

Wir schliessen hieraus folgenden fundamentalen Satz, der die bisher angeführten als specielle Fälle in sich begreift: Wenn zwei Complex-Curven a und b eine Complex-Curve c berühren, so berühren sie auch eine Complex-Curve $a+b-c$.

Zum Beweise hat man nur eine Transformation mit der Constanten $a+b$ anzuwenden und dieselbe so zu bestimmen, dass die gegebenen beiden Complex-Curven in einander übergeführt werden.

Setzt man $b=-1$, so hat man den Satz: Die Fläche, die von den Complex-Curven c gebildet wird, welche eine feste Curve d berühren, wird auch erzeugt von den die feste Curve berührenden $a-c-1$.

Die beiden Curven c und $a-c-1$, welche sich in einem beliebigen Punkte der erzeugten Fläche schneiden, haben dabei eine harmonische Lage gegen die Haupttangenten der Fläche in diesem Punkte.

Für $b=0$ folgt:

Das Tangentensystem aller Curven b, welche eine feste Curve a berühren, bildet eine Congruenz, welche man auch auffassen kann als Tangentensysteme aller Complex-Curven $a-c$, welche a berühren.

Eine solche Congruenz hat zwei Brennflächen B_1 und B_2. B_2 wird erzeugt von den auf a rollenden Curven c oder auch von den auf a rollenden $a-c-1$, B_2 auf analoge Weise durch die Curven $a-c$ und $c-1$. Die c und $a-c$ zugehörigen Developpabeln (die Developpabeln der Congruenz) berühren bezüglich B_2 und B_1 nach den $c-1$ und den $a-c-1$.

Wenn b einen beliebigen Werth hat, erhält man analoge Sätze, in denen statt der Complex-Geraden eine bestimmte Gattung Complex-Curven auftritt.

8. In seinem Werke „Surfaces réglées tétraèdralement symmétriques [1])“ hat Herr de la Gournerie Raum-Curven betrachtet, die irreductibele Theile des Durchschnittes zweier Flächen mit den folgenden Gleichungen sind:

$$A\,(\alpha)^{\frac{p}{q}}+B\,(\beta)^{\frac{p}{q}}+C\,(\gamma)^{\frac{p}{q}}+D\,(\delta)^{\frac{p}{q}}=0,$$

$$A^1(\alpha)^{\frac{p}{q}}+B^1(\beta)^{\frac{p}{q}}+C^1(\gamma)^{\frac{p}{q}}+D^1\,(\delta)^{\frac{p}{q}}=0.$$

Er nennt diese Curven tetraedral symetrische. Ihre Tangenten bestimmen, wie er nachweist, mit dem Coordinaten-Tetraeder ein constantes Doppelverhältniss.

Einem bestimmten Exponenten $\frac{p}{q}$ entspricht eine vierfach unendliche Anzahl solcher Curven, von denen dreifach unendlich viele jedesmal einem Reye'schen Complexe angehören. Und zwar sind diejenigen tetraedral symmetrischen Complex-Curven, deren Exponent zum Zähler 1 hat, identisch mit den Curven der eben betrachteten Reihe. Unseren fundamentalen Satz

1) Paris. Gauthier—Villars. 1867.

können wir in dieser Bezeichnung folgendermassen aussprechen:

Wenn 2 tetraedral-symmetrische Curven mit den Exponenten e und e' eine tetraedral-symmetrische Curve vom Exponenten ε berühren, so berühren sie auch eine Curve vom Exponenten ε', wo

$$\frac{1}{e}+\frac{1}{e'}=\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon'},$$

vorausgesetzt, dass die Exponenten von der Form $\frac{1}{q}$ sind.

Die Betrachtungen lassen sich weiter verfolgen. Insbesondere sei hervorgehoben, dass der letzte Satz auch ohne die hinzugefügte Beschränkung gilt, dass er also gilt, welche Gestalt auch die Exponenten haben mögen. Man kann hiernach z. B. allgemein schliessen, dass die Fläche, welche von einer tetraedral-symetrischen Curve vom Exponenten b erzeugt wird, die auf einer festen Curve vom Exponenten a rollt, ein zweites System von tetraedral-symetrischen Curven enthält, dessen Index c sich aus der Gleichung bestimmt: $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Durch die Forderung, dass die beiden erzeugenden Curvensysteme identisch sein sollen, definirt man eine ausgezeichnete Flächenfamilie, und diese Flächen sind gerade diejenigen, welche Herr de la Gournerie surfaces tétraèdralement-symmétriques nennt und deren allgemeine Gleichung ist:

$$A(\alpha)^{\frac{p}{q}}+B(\beta)^{\frac{p}{q}}+C(\gamma)^{\frac{p}{q}}+D(\delta)^{\frac{p}{q}}=0.$$

Durch Fortsetzung der gegebenen Betrachtungen gelangt man zu dem Satze, dass die Curven der Haupttangenten für solche Flächen algebraisch werden. Die Haupttangenten-Curven werden dabei tetraedral-symetrische Curven vom Exponenten $\frac{p}{2q}$.

Ich möchte noch hinzufügen, dass sich die in der 4. Nummer angewandte r-Transformation als eine Abbildung des Reyeschen Complexes in den Punktraum auffassen lässt, so dass sich durch dieselbe die gewöhnliche Raumgeometrie auf den Complex überträgt. Diese Abbildung ist bei der reciproken Natur der r-Transformation durch die Art der gegenseitigen Lage des Objectes und des Bildes ausgezeichnet, welche eigenthümliche Vortheile mit sich bringt.

Auf diese Weise habe ich versucht die dem Reye'schen Complexe angehörigen Congruenzen zu discutiren, was keinerlei Schwierigkeit hat. Insonderheit erhält man für die dem Complexe angehörigen Congruenzen zweiter Ordnung dieselbe ausgezeichnete Gruppe, welche Herr Kummer in seiner Aufzählung der Congruenzen zweiter Ordnung als einem gemeinsamen Typus angehörig bezeichnet hat und deren allgemeinster Repräsentant die Congruenz zweiter Ordnung sechster Classe mit sechs zu einem Tetraeder vereinigten Doppellinien ist.

Ich stütze mich bei dieser Discussion auf die folgenden vier Hauptsätze:

1. Wenn ein Punkt eine Curve n. Ordnung beschreibt und dabei p mal mit einer Tetraederecke zusammenfällt, so beschreibt die r- re-

ciproke Complexgerade eine Linienfläche von dem Grade $2n-p$.

2. Eine Fläche n. Ordnung mit p in die Tetraederecken fallenden Punkten ist das Bild einer Congruenz von der Ordnung n und der Classe $3n-p$.

3. Die Ordnung der Brennfläche dieser Congruenz ist $2(k-q)$, wo k die Classe der ebenen Durchschnitts-Curve der Fläche n. Ordnung und q die Zahl ihrer in die Ecken des Fundamentaltetraeders fallenden Doppelpunkte ist.

4. Die Classe der Brennfläche bestimmt sich durch den allgemeinen Satz, dass die Differenz zwischen Ordnung und Classe der Brennfläche einer Congruenz gleich ist dem doppelten der Differenz von Ordnung und Classe der Congruenz.

Die letzten beiden Sätze verdanke ich Herrn Dr. Klein, mit dem zusammen ich gelegentlich eine ausführlichere Untersuchung der hieher gehörigen Congruenzen zu geben hoffe.

Berlin, im Januar 1870.

Ueber das Tetramethylbenzol.

Von

Rudolph Fittig.

Bei allen bis jetzt bekannten Homologen des Benzols sind höchstens drei Wasserstoffatome dieses Kohlenwasserstoffs durch Alkoholradicale ersetzt und man hat sogar die Vermuthung ausgesprochen (s. Beilstein Ann. Ch. Pharm. 137, 326), dass überhaupt von den sechs im Benzol

enthaltenen Wasserstoffatomen nur drei durch Alkoholradicale vertretbar seien. Allerdings giebt Berthelot an (Compt. rend. 65, 465 und Bull. soc. chim. 7. 41), dass er aus dem Steinkohlentheer ein bei 179—180° siedendes Tetramethylbenzol erhalten habe, allein diese Angabe verdient keine weitere Berücksichtigung, da sie weder durch Analysen, noch durch das Studium von Derivaten wahrscheinlich gemacht, geschweige denn bewiesen ist. Baeyer hat indess vor Kurzem in seiner höchst interessanten Abhandlung über die Mellithsäure Säuren kennen gelehrt, welche als die Oxydationsproducte eines Tetra- und Hexamethylbenzols angesehen werden müssen und dadurch wurde in mir der Wunsch erweckt, diese Kohlenwasserstoffe selbst kennen zu lernen. In Gemeinschaft mit Herrn Dr. P. Jannasch habe ich zunächst versucht, ein Tetramethylbenzol darzustellen. Wir wandten dabei die bekannte Methode an, stellten zuerst aus den Xylolen des Steinkohlentheers eine grössere Quantität von Trimethylbenzol (Pseudocumol) dar, verwandelten dieses in die schön krystallisirende Monobromverbindung und zersetzten diese, mit der erforderlichen Menge Jodmethyl gemischt, in ätherischer Lösung mit Natrium. Die Reaction verlief nur äusserst langsam und erst nach etwa 6-tägigem Stehen konnte dieselbe als beendigt angesehen werden. Jetzt wurde abdestillirt und das Product fractionirt. Schon nach einmaliger Destillation erstarrten sämmtliche zwischen 170 und 200° aufgefangenen Destillate beim Erkalten krystallinisch, die ersteren theilweise, die letzteren vollständig. Der grösste Theil ging nach 2—3 maliger Destillation zwischen 185 und 195° über und wurde beim Erkalten fast vollständig fest. Um den

neuen Kohlenwasserstoff ganz rein zu erhalten, haben wir diesen Theil so lange zwischen oft erneuertem Fliesspapier abgepresst, bis kein Oelfleck mehr bemerkbar war, die feste, völlig trockne Masse dann einige Zeit neben Schwefelsäure gestellt und darauf rectificirt. Die Analyse des so gereinigten Kohlenwasserstoffs ergab Zahlen, welche genau für die Formel des Tetramethylbenzols $C^{10}H^{14} = C^6H^2(CH^3)^4$ passten. Da die Theorie die Existenz mehrerer Modificationen vom Tetramethylbenzol wahrscheinlich macht, so wollen wir unseren Kohlenwasserstoff mit dem Namen Durol bezeichnen.

Das Durol ist der einzige, bis jetzt bekannte, bei gewöhnlicher Temperatur feste Kohlenwasserstoff der Benzolreihe. Es krystallisirt aus Alkohol in compacten Krystallen, welche dem mono- oder triklinen System angehören, ist leicht löslich in Alkohol, Aether und Benzol, riecht nur schwach benzolartig, schmilzt zwischen 79 und 80° und siedet constant bei 189—191°. Es schwimmt auf Wasser, verflüchtigt sich leicht mit den Wasserdämpfen und brennt mit stark leuchtender Flamme.

Dinitrodurol $C^{10}H^{12}(NO^2)^2 = C^6(NO^2)^2(CH^3)^4$. Trägt man den Kohlenwasserstoff in kalte sehr concentrirte Salpetersäure ein, so bewegen sich die Partikelchen lebhaft auf der Oberfläche und lösen sich unter vorübergehender Braunfärbung leicht und ohne besonders heftige Reaction auf. Beim Eingiessen dieser Lösung in Wasser scheidet sich ein rein weisser flockiger Niederschlag von reinem Dinitrodurol ab. Diese Verbindung krystallisirt aus Alkohol in völlig farblosen, glänzenden rhombischen Prismen, aus Benzol in compacten Krystallen. Sie ist leicht löslich in Aether, etwas schwerer in

Benzol, noch schwerer in heissem Alkohol und sehr wenig in kaltem Alkohol. Sie schmilzt bei 205° und sublimirt in höherer Temperatur ohne Zersetzung in prächtig glänzenden Nadeln.

Eine Mononitroverbindung entsteht unter diesen Umständen nicht.

Dibromdurol $C^{10}H^{12}Br^2 = C^6Br^2(CH^3)^4$ entsteht unter heftiger Reaction, wenn man das Durol in der Kälte in überschüssigem Brom auflöst und das Product mit Natronlauge und Wasser wäscht. Es ist fast unlöslich in kaltem Alkohol, ziemlich schwierig löslich in siedendem und krystallisirt daraus in zollangen, dünnen, seideglänzenden, spröden Nadeln. Es schmilzt bei 199° und lässt sich bei höherer Temperatur ohne Zersetzung sublimiren.

Zum Studium anderer Derivate und namentlich der Oxydationsproducte dieses interessanten Kohlenwasserstoffs reichte die verhältnissmässig kleine Menge, welche wir bis jetzt davon dargestellt haben, nicht aus.

Wegen der bevorstehenden Trennung unseres Wohnortes wird Hr. Dr. Jannasch die weitere Untersuchung des Durols allein übernehmen und später ausführliche Mittheilungen darüber machen, während ich ein mit dem Durol isomerisches Tetramethylbenzol aus dem Mesitylen zu erhalten und die Frage mit Sicherheit zu entscheiden suchen werde, ob das Durol oder überhaupt irgend eine Modification des Tetramethylbenzols im Steinkohlentheer vorkommt.

Ueber eine Erweiterung des Begriffs von Parallelflächen.

Von

A. Enneper.

Sind P und P_1 zwei correspondirende Puncte zweier Parallelflächen S und S_1, so haben bekanntlich die Puncte P und P_1 dieselbe Normale, den Krümmungslinien der Fläche S entsprechen auf der Fläche S_1 ebenfalls Krümmungslinien. Diese letztere Eigenschaft ist in manchen Fällen von Bedeutung, indem dieselbe wesentlich zur Vereinfachung analytischer Operationen beitragen kann. Der Begriff von Parallelflächen lässt sich als besonderer Fall auffassen, dass zwei Flächen S und S_1 so zu einander in Beziehung stehn, dass die Normalen in zwei correspondirenden Puncten P und P_1 parallel sind und den Krümmungslinien der Fläche S ebenfalls Krümmungslinien der Fläche S_1 entsprechen. Bezeichnet man durch t die Projection der Distanz der beiden Puncte P und P_1 auf eine der parallelen Normalen in diesen Puncten zu den Flächen S und S_1, so ist t durch eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt. Einer gegebenen Fläche S entsprechen unendlich viele Flächen S_1, welche alle die Eigenschaft haben, dass in zwei Puncten, deren Normalen parallel sind, das Verhältniss des Krümmungshalbmessers zum Torsionsradius einer Krümmungslinie dasselbe ist. Hat die Fläche S ein System von Krümmungslinienplan, so ist dieses auch für alle Flächen S_1 der Fall. Eine andere bemerkenswerthe Beziehung zwischen der Fläche S und den Flächen S_1 besteht darin: lässt sich die Fläche S ohne Faltung oder Zerreissung so

biegen, dass die Krümmungslinien nach der Biegung Krümmungslinien bleiben, so lassen sich die Flächen S_1 auf gleiche Art deformiren. Die unüberwindlichen Schwierigkeiten, welche sich der analytischen Behandlung bei Problemen der Deformation von Flächen, wie das oben erwähnte, entgegenstellen, sind die Veranlassung der nachfolgenden Darstellung. Nimmt man eine Fläche S von der angegebenen Eigenschaft als bekannt an, so hängt die Bestimmung einer Fläche S_1 nur von einer linearen partiellen Differentialgleichung ab, während die allgemeine Bestimmung der Fläche S von der Integration einer nicht linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung abhängig ist, deren Integration nur in wenigen besondern Fällen gelingt.

Nimmt man die Quantität t constant, so wird die Gleichung, welche t bestimmt, identisch. Der Fläche S entspricht dann nur eine Fläche S_1, welche eine Parallelfläche zu S ist. Es soll vorausgesetzt werden, dass die Fläche S sich nicht in einer Ebene ausbreiten lässt. Was die analytischen Ausdrücke der Coordinaten zweier correspondirenden Punctte (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) der Flächen S und S_1 betrifft, so mögen dieselben ohne weitere Herleitung hier angemerkt werden.

Sieht man x, y, z als Functionen zweier Variabeln u und v an, so seien E, G, F, A, B, C durch folgende Gleichungen definirt:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2=E,$$

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)^2+\left(\frac{dy}{dv}\right)^2+\left(\frac{dz}{dv}\right)^2=G,$$

$$\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv}+\frac{dy}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{dz}{du}\frac{dz}{dv}=F.$$

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{du^2}, & \frac{d^2y}{du^2}, & \frac{d^2z}{du^2} \\ \frac{dx}{du}, & \frac{dy}{du}, & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv}, & \frac{dy}{dv}, & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix} = A, \qquad \begin{vmatrix} \frac{d^2x}{dv^2}, & \frac{d^2y}{dv^2}, & \frac{d^2z}{dv^2} \\ \frac{dx}{du}, & \frac{dy}{du}, & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv}, & \frac{dy}{dv}, & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix} = B,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{du\,dv}, & \frac{d^2y}{du\,dv}, & \frac{d^2z}{du\,dv} \\ \frac{dx}{du}, & \frac{dy}{du}, & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv}, & \frac{dy}{dv}, & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix} = C.$$

Ersetzt man in den vorstehenden Gleichungen x, y, z durch x_1, y_1, z_1 so gehn E, F, G, A, B, C über in $E_1, F^1, G_1, A_1, B_1, C_1$. Die Winkel, welche die Normale im Puncte (x, y, z) mit den Coordinatenaxen bildet, seien a, b, c. Entspricht der Punct (x_1, y_1, z_1) der Fläche S_1 dem Puncte (x, y, z) der Fläche S derart, dass die Normalen in beiden Puncten parallel sind, so hat man:

$$x_1 = x + t\cos a$$

$$+\left\{\left(C\frac{dx}{dv}-B\frac{dx}{du}\right)\frac{dt}{dn}+\left(C\frac{dx}{du}-A\frac{dx}{dv}\right)\frac{dt}{dv}\right\}H,$$

$$y_1 = y + t\cos b$$

$$+\left\{\left(C\frac{dy}{dv}-B\frac{dy}{du}\right)\frac{dt}{du}+\left(C\frac{dy}{du}-A\frac{dy}{dv}\right)\frac{dt}{dv}\right\}H.,$$

$$z_1 = z + t\cos c$$
$$+\left\{\left(C\frac{dz}{dv} - B\frac{dz}{du}\right)\frac{dt}{du} + \left(C\frac{dz}{du} - A\frac{dz}{dv}\right)\frac{dt}{dv}\right\} H,$$

$$H = \frac{\sqrt{(EG-F^2)}}{AB-C^2}.$$

In den vorstehenden Gleichungen ist t Function von u und v. Die Werthe von $\frac{dx_1}{du}$ und $\frac{dx_1}{dv}$ lassen sich auf folgende Formen bringen:

1) $$\frac{dx_1}{du} = \frac{dx}{du} + t\frac{d\cos a}{du}$$
$$+\left\{\left(C\frac{dx}{dv} - B\frac{dx}{du}\right)L + \left(C\frac{dx}{du} - A\frac{dx}{dv}\right)N\right\} H,$$

2) $$\frac{dx_1}{dv} = \frac{dx}{dv} + t\frac{d\cos a}{dv}$$
$$+\left\{\left(C\frac{dx}{dv} - B\frac{dx}{du}\right)N + \left(C\frac{dx}{du} - A\frac{dx}{dv}\right)M\right\} H,$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$P_1 = \tfrac{1}{2}G\frac{dE}{du} - F\frac{dF}{du} + \tfrac{1}{2}F\frac{dE}{dv},$$
$$P_2 = \tfrac{1}{2}F\frac{dE}{du} - E\frac{dF}{du} + \tfrac{1}{2}E\frac{dE}{dv},$$
$$R_1 = \tfrac{1}{2}F\frac{dG}{du} - \tfrac{1}{2}G\frac{dE}{dv},$$
$$R_2 = \tfrac{1}{2}F\frac{dE}{dv} - \tfrac{1}{2}E\frac{dG}{du},$$

$$Q_1 = \tfrac{1}{2} E \frac{dG}{dv} - F \frac{dF}{dv} + \tfrac{1}{2} F \frac{dG}{du},$$

$$Q_2 = \tfrac{1}{2} F \frac{dG}{dv} - G \frac{dF}{dv} + \tfrac{1}{2} G \frac{dG}{du},$$

so ist in 1):

$$3)\quad L = \frac{d^2t}{du^2} + \tfrac{1}{2} \frac{d \log (EG - F^2)}{du} \frac{dt}{du}$$

$$+ \frac{C \frac{dA}{du} - A \frac{dC}{du}}{AB - C^2} \frac{dt}{dv} - \frac{B \frac{dA}{du} - C \frac{dC}{du}}{AB - C^2} \frac{dt}{du}$$

$$+ \frac{CP_2 - AP_1}{AB - C^2} \cdot \frac{C \frac{dt}{dv} - B \frac{dt}{du}}{EG - F^2}$$

$$+ \frac{CR_2 + AR_1}{AB - C^2} \cdot \frac{C \frac{dt}{du} - A \frac{dt}{dv}}{EG - F^2},$$

$$4)\quad N = \frac{dt}{du\,dv} + \tfrac{1}{2} \frac{d \log (EG - F^2)}{du} \frac{dt}{dv}$$

$$- \frac{A \frac{dB}{du} - C \frac{dC}{du}}{AB - C^2} \frac{dt}{dv} + \frac{C \frac{dB}{du} - B \frac{dC}{du}}{AB - C^2} \frac{dt}{du}$$

$$+ \frac{BP_2 - CP_1}{AB - C^2} \cdot \frac{C \frac{dt}{dv} - B \frac{dt}{du}}{EG - F^2}$$

$$+ \frac{BR_2 - CR_1}{AB - C^2} \cdot \frac{C \frac{dt}{du} - A \frac{dt}{dv}}{EG - F^2}.$$

In der Gleichung 2) haben M und N folgende Bedeutungen:

$$5)\quad M = \frac{d^2t}{dv^2} + \tfrac{1}{2}\frac{d\log(EG-F^2)}{dv}\frac{dt}{dv}$$

$$\frac{C\frac{dB}{dv} - B\frac{dC}{dv}}{AB-C^2}\frac{dt}{du} - \frac{A\frac{dB}{dv} - C\frac{dC}{dv}}{dB-C^2}\frac{dt}{dv}$$

$$+\frac{CQ_2 - BQ_1}{AB-C^2}\cdot\frac{C\frac{dt}{du} - A\frac{dt}{dv}}{EG-F^2}$$

$$+\frac{CR_1 + BR_2}{AB-C^2}\cdot\frac{C\frac{dt}{dv} - B\frac{dt}{du}}{EG-F^2},$$

$$6)\quad N = \frac{d^2t}{du\,dv} + \tfrac{1}{2}\frac{d\log(EG-F^2)}{dv}\frac{dt}{du}$$

$$-\frac{B\frac{dA}{dv} - C\frac{dC}{dv}}{AB-C^2}\frac{dt}{du} + \frac{C\frac{dA}{dv} - A\frac{dC}{dv}}{AB-C^2}\frac{dt}{dv}$$

$$+\frac{AQ_2 - CQ_1}{AB-C^2}\cdot\frac{C\frac{dt}{du} - A\frac{dt}{dv}}{EG-F^2}$$

$$+\frac{AR_1 + CR_2}{AB-C^2}\cdot\frac{C\frac{dt}{dv} - B\frac{dt}{du}}{EG-F^2}.$$

Es ist selbstverständlich, dass die beiden

Werthe von N aus 4) und 6) einander gleich sind. Setzt man:

$$
7)\begin{cases}
P.\dfrac{AB-C^2}{\sqrt{(EG-F^2)}} = \\
F\left(C\dfrac{dt}{dv}-B\dfrac{dt}{du}\right)+G\left(C\dfrac{dt}{du}-A\dfrac{dt}{dv}\right), \\
Q.\dfrac{AB-C^2}{\sqrt{(EG-F^2)}} = \\
F\left(C\dfrac{dt}{du}-A\dfrac{dt}{dv}\right)+E\left(C\dfrac{dt}{dv}-B\dfrac{dt}{du}\right),
\end{cases}
$$

$$2R = \left(C\frac{dt}{dv}-B\frac{dt}{du}\right)\frac{dE}{dv}+\left(C\frac{dt}{du}-A\frac{dt}{dv}\right)\frac{dG}{du},$$

so ist:

$$(BF-CG)L+(AG-CF)N = R - \frac{AB-C^2}{\sqrt{(EG-F^2)}}\frac{dP}{du},$$

$$(CE-AF)M+(CF-BE)N = -R + \frac{AB-C^2}{\sqrt{(EG-F^2)}}\frac{dQ}{dv},$$

und:

$$\begin{vmatrix} L, & M, & N \\ A, & B, & C \\ E, & G, & F \end{vmatrix} = \frac{AB-C^2}{\sqrt{(EG-F^2)}}\left(\frac{dQ}{dv}-\frac{dP}{du}\right).$$

Für:

$$1 - t\frac{AG + BE - 2CF}{(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}} = p\sqrt{(EG - F^2)},$$

$$t\frac{AB - C^2}{(EG - F^2)^2} = q,$$

$$\sqrt{(E_1 G_1 - F_1^2)} = r,$$

ist:

$$8)\quad \begin{cases} \dfrac{A_1}{r} = Ap + Eq - L, \\ \dfrac{B_1}{r} = Bp + Gq - M, \\ \dfrac{C_1}{r} = Cp + Fq - N. \end{cases}$$

Sollen den Krümmungslinien der Fläche S auf der Fläche S_1 ebenfalls Krümmungslinien entsprechen, so ist:

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A, & B, & C \\ E, & G, & F \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} E_1, & G_1, & F_1 \\ A, & B, & C \\ E, & G, & F \end{vmatrix} = 0.$$

Beiden Gleichungen wird gleichzeitig genügt durch:

$$\begin{vmatrix} L, & M, & N \\ A, & B, & C \\ E, & G, & F \end{vmatrix} = 0,$$

oder:

$$9)\quad \frac{dP}{du} = \frac{dQ}{dv},$$

wo P und Q durch die Gleichungen 7) bestimmt sind. Setzt man in 1) und 2) für L, M, N ihre Werthe aus 9) so findet man:

$$\left(C\frac{dx}{dv}-B\frac{dx}{du}\right)H=\left(C_1\frac{dx_1}{dv}-B_1\frac{dx_1}{du}\right)H_1,$$

$$\left(C\frac{dx}{du}-A\frac{dx}{dv}\right)H=\left(C_1\frac{dx_1}{du}-A_1\frac{dx_1}{dv}\right)H_1,$$

$$H_1=\frac{\sqrt{(E_1G_1-F_1^2)}}{A_1B_1-C_1^2}.$$

Die Fläche S lässt sich auch leicht umgekehrt durch die Fläche S_1 definiren. Sind u, v die Argumente der Krümmungslinien, so ist $F=0$ und $C=0$. Die Gleichung 9) lässt sich dann auf folgende Art schreiben:

$$10)\quad \frac{d^2t}{du\,dv}=\frac{dt}{dv}\,\frac{d\log\frac{B}{G\sqrt{E}}}{du}+\frac{dt}{du}\,\frac{d\log\frac{A}{E\sqrt{G}}}{dv}.$$

Sei S die allgemeinste Fläche für welche ein System von Krümmungslinien plan ist, der Fläche S entspricht dann eine andere Fläche S_1, welche dieselbe Eigenschaft hat. Eine genauere Untersuchung zeigt, dass die willkührlichen Functionen, welche die Integration der Gleichung 9) oder 10) involvirt, in den Ausdrücken für x_1, y_1, z_1 sich einfach durch Addition mit den willkührlichen Functionen verbinden, welche die Werthe von x, y, z enthalten. Man kann nun umgekehrt die Fläche S_1 so bestimmen, dass die Coordinaten eines Punctes derselben zwei arbiträre Functionen weniger enthalten wie die Co-

ordinaten des entsprechenden Punctes der Fläche S. Hierdurch gelangt man zu dem Resultate, dass sich eine Fläche S aus einer Fläch S_1 herleiten lässt, deren plane Krümmungslinien Kreise sind, die sämmtlich durch einen festen Punct gehn. Sind beide Systeme von Krümmungslinien der Fläche S plan, so lässt sich die Fläche S_1 einfach auf die Kugelfläche reduciren. Da in diesem letzten Falle die Werthe von x_1, y_1, z_1 nicht ohne Interesse sind, so mögen dieselben hier Platz finden. Bedeutet g eine Constante, so hat man:

$$\frac{x_1}{g} = k' \frac{\sin v \cos u}{1 + k \sin u \sin v},$$
$$\frac{y_1}{g} = \frac{k + \sin u \sin v}{1 + k \sin u \sin v}, \quad k' = \sqrt{(1 - k^2)}.$$
$$\frac{z_1}{g} = \frac{k' \cos v}{1 + k \sin u \sin v},$$

Eine weitere Begründung dieser Resultate, welche ziemlich ausgedehnte Untersuchungen erfordert, muss natürlich hier unterbleiben.

Die Betrachtung der Fläche S_1 ist von Nutzen, wenn sich eine Fläche so biegen lässt, dass die Krümmungslinien nach der Biegung Krümmungslinien bleiben. Sind u und v die Argumente der Krümmungslinien, hängt U nur von u, V nur von v ab, so ist das Criterium einer derartigen Biegung in der Gleichung enthalten:

$$\left\{\left(\frac{d\cos a}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\cos b}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\cos c}{dv}\right)^2\right\} V^2$$
$$11) \quad - \left\{\left(\frac{d\cos a}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\cos b}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\cos c}{du}\right)^2\right\} U^2 = 1.$$

Diese Gleichung setzt voraus, dass $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ als Functionen von u und v bekannt sind, die Functionen U und V müssen sich dann so bestimmen lassen, dass die Gleichung 11) identisch wird. So einfach das obige Criterium auch ist, muss seine Anwendung in sofern eine beschränkte bleiben, als man nur in verhältnissmässig wenig Fällen $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ als Functionen der Argumente der Krümmungslinien darstellen kann. Ist irgend eine Fläche S bekannt, so kann man mittelst der Gleichung 9) neue Flächen ableiten, wobei es nicht erforderlich ist, dass u und v die Argumente der Krümmungslinien sind. Zu Anwendungen giebt der folgende Satz Veranlassung:

Findet zwischen den Hauptkrümmungshalbmessern einer Fläche eine Relation statt, soll sich die Fläche so biegen lassen, dass die Krümmungslinien nach der Biegung wieder Krümmungslinien sind, so genügen diesen Bedingungen die Rotationsflächen, die Flächen von constantem, positivem Krümmungsmaasse und deren Parallelflächen. Ist die Fläche S eine Rotationsfläche, so ist die Fläche S_1 die Enveloppe einer Rotationsfläche, welche sich so bewegt, dass ein fester Punct der Rotationsaxe eine plane Curve beschreibt und die Axe senkrecht zur Ebene der Curve ist. Uebrigens lässt sich in diesem Falle jede Rotationsfläche durch die Kugelfläche ersetzen, wenn man als Krümmungslinien derselben Meridiane und Parallelkreise nimmt, es ergeben sich dann alle Flächen S_1 der angegebenen Art. Diese Flächen haben die Eigenschaft, dass beide Systeme von Krümmungslinien plan sind und die Ebenen des einen Systems die Normalen zur Fläche enthalten.

Zu wesentlich verschiedenen Resultaten führen die Flächen, deren Krümmungsmaass positiv constant ist, man gelangt mit Hülfe derselben zu neuen Flächen, deren Aufstellung mittelst Gleichung 11) sich nicht direct durchführen lässt, oder wenigstens mit ungemeinen Weitläufigkeiten verbunden ist. Zu einem einfachen Beispiele hierzu werde die Helikoidfläche von constantem Krümmungsmaass genommen. Eine Helikoidfläche wird durch eine plane Curve erzeugt, welche sich so bewegt, dass ein fester Punct derselben eine Schraubenlinie eines Kreiscylinders beschreibt, wobei die Ebene der Curve beständig durch die Axe des Cylinders geht. Nimmt man diese Axe zur Axe der z, so hat man für einen Punct (x, y, z) folgende Gleichungen:

$$\frac{x}{g\cos u} = \frac{y}{g\sin u} = L,$$

$$L = \frac{k'}{k}\sqrt{(1 - k'^2 \sin\alpha)}\sqrt{\left(\frac{\cos^2\alpha + k^2\sin^2\alpha\sin^2 v}{1 - k^2\sin^2 v}\right)}$$

$$\frac{z}{g} = \frac{k'^2}{k}\sin\alpha\,.\cos\alpha\,.u +$$

$$\frac{k'^2}{k}\int\frac{k^2\sqrt{(1 - k'^2\sin^2\alpha)}\sin^2 v}{(\cos^2\alpha + k^2\sin^2\alpha\sin^2 v)(1 - k^2\sin^2 v)^{\frac{3}{2}}}\,dv,$$

wo $k^2 + k'^2 = 1$, g nud α Constanten sind. In der Gleichung 9) haben dann P und Q folgende Werthe:

$$P = k^2 \frac{\sin v}{\cos^2\alpha + k^2 \sin^2\alpha \sin^2 v} \frac{dt}{dv} +$$

$$\frac{k^2 \sin\alpha \cos\alpha \sqrt{(1-k'^2\sin^2\alpha)} \sin v \sqrt{(1-k^2\sin^2 v)}}{(\cos^2\alpha + k^2\sin^2\alpha \sin^2 v)^2} \frac{dt}{du},$$

$$Q = \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\alpha)}} \frac{(1-k^2\sin^2 v)^{\frac{3}{2}}}{\sin v} \frac{dt}{dv} +$$

$$\frac{1}{\sin v} \cdot \frac{\cos^2\alpha + k^4\sin^2\alpha \sin^2 v}{\cos^2\alpha + k^2\sin^2\alpha \sin^2 v} \frac{dt}{du}.$$

Die Gleichung 9) lässt sich in diesem Falle in mehreren besondern Fällen integriren, deren weitere Behandlung hier zu weit führen würde.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

Februar 23. №. 5. 1870.

Universität.

Verzeichniss der Vorlesungen auf der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen während des Sommerhalbjahrs 1870. Die Vorlesungen beginnen den 20. April und enden den 20. August.

Theologie.

Theologie des Alten Testaments: Professor *Bertheau* vierstündig Mont., Dienst., Donnerst., Freit. um 11 Uhr.

Erklärung der Genesis: *Derselbe* sechsstündig um 10 Uhr.

Einleitung in das Neue Testament: Prof. *Wiesinger* fünfmal um 12 Uhr.

Leben Jesu Christi: Prof. *Ehrenfeuchter* viermal, Mont. Dienst. Donnerst. Freit., um 12 Uhr.

Synoptische Erklärung der drei ersten Evangelien: Prof. *Lünemann* sechsmal um 9 Uhr.

Erklärung des Evangeliums Johannis: Prof. *Gess* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung des Römerbriefs: Prof. *Wiesinger* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung des Hebräerbriefs: Lic. *Zahn* fünfstündig um 9 Uhr.

Kirchengeschichte: Prof. *Wagenmann* neun- bis zehnstündig von 7—8 und 8—9 Uhr.

Kirchengeschichte II. Theil: Prof. *Duncker* sechsmal um 8 Uhr.

Dogmengeschichte: Prof. *Duncker* fünfmal um 11 Uhr und Sonnabends um 7 Uhr.

Comparative Symbolik: Prof. *Ritschl* fünfmal um 10 Uhr; Prof. *Matthaei* zweimal, Donnerst. und Freit., um 2 Uhr.

Symbolik der lutherischen Kirche: *Derselbe* Mont. und Dienst. um 2 Uhr.

Einleitung in die Dogmatik: Prof. *Schöberlein* zweimal, Mittw. und Sonnab., um 12 Uhr, öffentlich.

Dogmatik I. Theil: *Derselbe* viermal um 12 Uhr.

Dogmatik II. Theil: Prof. *Ritschl* fünfmal um 11 Uhr.

Theologische Ethik: Prof. *Gess* fünfmal um 12 Uhr.

Praktische Theologie II. Theil (Liturgik, Homiletik, Theorie der Seelsorge und Kirchenpolitik): Prof. *Ehrenfeuchter* fünfmal von 3—4 Uhr.

Katechetik und Homiletik: Prof. *Schöberlein* Mont. u. Dienst. um 4 Uhr.

Liturgik: *Derselbe* Donnerst. und Freit. um 4 Uhr.

Kirchenrecht s. Seite 86.

Die Uebungen des Königl. Homiletischen Seminars leiten abwechslungsweise Prof. *Ehrenfeuchter* und Prof. *Wiesinger* Sonnabends 9—12 Uhr öffentlich.

Katechetische Uebungen: Prof. *Ehrenfeuchter* Sonnabends 3—4 Uhr; Prof. *Wiesinger* Mittwochs 5—6 Uhr öffentlich.

Die liturgischen Uebungen der Mitglieder des praktisch-theologischen Seminars leitet Prof. *Schöberlein* Sonnabends 9—10 Uhr öffentlich.

Anleitung zum Kirchengesang giebt *Derselbe* Mittwochs 6—7 Uhr öffentlich.

Eine theologische Societät leitet Prof. *Gess*; eine dogmatische Prof. *Schöberlein* Freit. um 6 Uhr; eine historisch-theologische Prof. *Wagenmann* Freit. 6 Uhr.

Die exegetischen, kirchenhistorischen und systematischen Conversatorien im theologischen Stift werden in gewöhnlicher Weise Montag Abends 6 Uhr von den Repetenten geleitet werden.

Repetent *Hachfeld* wird zweistündig, Dienst. und Don-

nerstags um 8 Uhr, die Reden Christi nach den Synoptikern cursorisch und unentgeltlich erklären, Repetent *Besser* erbietet sich zu cursorischen Vorlesungen über alttestamentliche Abschnitte.

Rechtswissenschaft.

Encyclopädie der Rechtswissenschaft: Prof. *John* vier Mal wöch. von 9—10 Uhr.

Geschichte des römischen Rechts: Prof. *Hartmann* sechs Mal wöch. von 10—11 Uhr.

Institutionen des römischen Rechts: Prof. *Francke* von 11—12 Uhr.

Pandecten: Prof. *Schlesinger* sechs Mal wöch. von 9—10 und von 11—12.

Römisches Erbrecht: Prof. *Francke* von 8—9 Uhr.

Exegetische Vorlesungen wird Prof. *Ribbentrop* über eine den Zuhörern mitzutheilende gedruckte Chrestomathie fünf Mal wöch. von 12—1 Uhr halten.

Deutsche Staats- und Rechtsgeschichte: Prof. *Frensdorff* fünf Mal wöch. von 11—12 Uhr.

Geschichte des deutschen Städtewesens: Prof. *Frensdorff* zwei Mal wöch. von 12—1 Uhr öffentlich.

Deutsches Privatrecht mit Einschluss des Lehnrechts und Handelsrechts: Prof. *Kraut* nach der vierten Ausgabe seines Grundrisses täglich von 7—8 und von 9—10 Uhr, Prof. *Wolff* 6 Stunden von 7—8 Uhr; deutsches Privatrecht mit Einschluss des Lehnrechts: Dr. *Sohm* sechs Mal wöch. von 9—10 Uhr und am Dienstag Donnerstag und Sonnabend von 10—11 Uhr.

Handelsrecht: Prof. *Thöl* nach seinem Buche (das Handelsrecht, vierte Aufl.) fünf Mal wöch. von 7—8 Uhr.

Privatseerecht: Prof. *Schlesinger* vier Mal wöch. von 8—9 Uhr.

Deutsches Strafrecht: Prof. *Zachariae* sechs Mal wöch. um 11 Uhr.

Deutsches Staatsrecht: Prof. *Zachariae* sechs Mal wöch. um 12 Uhr; Staatsrecht des norddeutschen Bundes nebst einer Geschichte des deutschen Staatsrechts vom Jahre

1648 an: Prof. *John* Dienst. Donnerst. und Freit. von 12—1 Uhr.

Evangelisches und katholisches Kirchenrecht einschliesslich des Eherechts: Prof. *Dove* sechs Mal wöch. von 9—10 Uhr.

Geschichte der Kirchenverfassung und des Verhältnisses von Staat und Kirche: Prof. *Dove* zwei Mal wöch. von 3—4 Uhr öffentlich.

Canonistische Uebungen leitet Prof. *Dove* zu festzusetzender Stunde unentgeltlich.

Theorie des deutschen Civilprocesses: Prof. *Hartmann* sechs Mal wöch. von 11—12 Uhr und zwei Mal wöch. zu einer andern passenden Stunde; Theorie des gemeinen Civilprocesses: Dr. *Grefe* sechs Stunden um 1 Uhr.

Strafprocess: Prof. *John* vier Mal wöch. von 8—9 Uhr.

Pandektenpracticum: Prof. *Thöl* Mont. und Donnerst. von 4—5 und von 5—6 Uhr.

Civilprocess-Practicum: Prof. *Briegleb* Dienst. u. Freit. 4—6 Uhr.

Criminalpracticum: Prof. *John* Mittw. von 4—6 Uhr.

Medicin.

Zoologie, Botanik, Chemie s. unter Naturwissenschaften.

Systematische Anatomie II. Theil (Gefäss- und Nervenlehre): Prof. *Henle*, täglich von 12—1 Uhr.

Allgemeine Anatomie: Prof. *Henle*, Montag, Mittwoch, Freitag von 11—12 Uhr.

Mikroskopische Uebungen leitet Prof. *Krämer* privatissime.

Mikroskopische Curse im pathologischen Institute hält Prof. *Krause* wie bisher.

Allgemeine und besondere Physiologie mit Erläuterungen durch Experimente und mikroskopische Demonstrationen: Prof. *Herbst* sechs Mal wöchentlich um 10 Uhr.

Experimentalphysiologie I. Theil (Physiologie der Ernährung): Prof. *Meissner* fünf Mal wöchentlich von 10—11 Uhr.

Physiologie der Zeugung nebst allgemeiner und spe-

cieller Entwicklungsgeschichte: Prof. *Meissner*, Freitag von 5—7 Uhr.

Physiologische Optik s. S. 92.

Arbeiten im physiologischen Institut leitet Prof. *Meissner* täglich in passenden Stunden.

Allgemeine Pathologie (incl. Missbildungen) und Therapie: Prof. *Krause*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 2—3 Uhr.

Physikalische Diagnostik verbunden mit praktischen Uebungen an Gesunden und Kranken trägt Dr. *Wiese* vier Mal wöchentlich in später näher zu bezeichnenden Stunden vor.

Pharmakologie oder Lehre von den Wirkungen und der Anwendungsweise der Arzneimittel so wie Anleitung zum Receptschreiben: Prof. *Marx* fünfmal wöchentlich von 3—4 Uhr.

Arzneimittellehre und Receptirkunde mit Demonstrationen aus der Pharmakognosie und einer Einleitung in die Bäderlehre verbunden trägt Dr. *Husemann* fünfmal wöchentlich um 3 Uhr. vor.

Arzneimittellehre in Verbindung mit pharmakognostischen Demonstrationen und pharmakodynamischen Experimenten trägt Dr. *Marmé* Montag, Dienstag, Mittwoch und Donnerstag von 5—6 Uhr vor.

Receptirkunst mit Uebungen im Receptschreiben: Dr. *Marmé* unentgeldlich Donnerstag von 6—7 Uhr oder zu anderer Zeit.

Pharmakognosie lehrt Prof. *Wiggers* fünf Mal wöchentlich von 2—3 Uhr nach seinem Handbuche der Pharmakognosie, 5. Aufl. Göttingen 1864.

Pharmacie lehrt Prof. *Wiggers* sechs Mal wöchentlich von 6—7 Uhr Morgens; Dasselbe lehrt Dr. *Stromeyer* privatissime.

Pharmaceutische Chemie und Organische Chemie für Mediciner: Vgl. Naturwissenschaften S. 92.

Ein Repetitorium über Arzneimittellehre und Therapie hält Dr. *Husemann* dreimal wöchentlich in passenden Stunden.

Ueber die anästhesirenden Mittel handelt Dr. *Husemann* Montag von 4—5 Uhr. öffentlich.

Die wichtigsten Gifte bespricht und erläutert durch Experimente speciell für Pharmaceuten und Chemiker Dr. *Marmé* Montag und Dienstag von 6—7 Uhr.

Pharmakologische und toxikologische Untersuchungen leitet Dr. *Marmé* im physiologischen Institut.

Praktische Uebungen in der Anwendung der Elektricität (des inducirten und des constanten Stroms) als Heilmittel hält Dr. *Marmé* Montag und Dienstag von 3—4 Uhr.

Specielle Pathologie und Therapie: Prof. *Hasse* täglich von 7—8 Uhr.

Die Hautkrankheiten lehrt Prof. *Krämer* Dienstag und Freitag von 4—5 Uhr oder zu einer andern passenden Stunde.

Die medicinische Klinik und Poliklinik leitet Professor *Hasse* täglich von $10^1/_2$—12 Uhr.

Chirurgie I. Theil: Prof. *Baum* fünf Mal wöchentlich von 4—5 Uhr, Sonnabend von 3—4 Uhr.

Specielle Chirurgie als II. Theil der Chirurgie trägt Prof. *Lohmeyer* von 11—12 Uhr oder zu einer andern passenden Zeit vor.

Ueber Knochenbrüche und Verrenkungen trägt Prof. *Baum* Mittwoch und Sonnabend von 2—3 Uhr publice vor.

Augenoperationslehre mit praktischen Uebungen trägt Prof. *Schweigger* zweimal wöchentlich von 3—4 Uhr vor.

Die chirurgische Klinik und Poliklinik hält Prof. *Baum* täglich um 9 Uhr.

Die Klinik der Augenkrankheiten hält Prof. *Schweigger* Montag, Dienstag, Donnerst. u. Freitag von 12—1 Uhr.

Uebungen in chirurgischen Operationen an der Leiche leitet Prof. *Baum* im Anatomiegebäude so oft Leichen vorhanden von 5 Uhr Nachm. an.

Praktische Uebungen im Gebrauch des Augenspiegels leitet Prof. *Schweigger* Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Pathologische Anatomie des Auges mit Demonstration von Präparaten: Prof. *Schweigger* zweimal wöchentlich von 3—4 Uhr.

Gynaekologie trägt Prof. *Schwartz* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag um 3 Uhr vor.

Geburtshülflichen Operationscursus hält Prof. *Schwartz* Mittwoch und Sonnabend um 8 Uhr.

Geburtshülfliches Casuisticum mit Phantomübungen hält Prof. *Krämer* in näher zu verabredenden Stunden.

Geburtshülflich-gynaekologische Klinik leitet Professor

Schwartz Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag um 8 Uhr.

Pathologie und Therapie der Geisteskrankheiten lehrt Prof. *Meyer* Mittwoch und Sonnabend von 8—9 Uhr im Ernst-August-Hospital.

Psychiatrische Klinik hält Prof. *Meyer* Montag und Donnerstag von 4—6 Uhr in der Irrenanstalt.

Ueber Schädeldifformitäten und ihre Bedeutung für die Diagnostik der Geisteskrankheiten trägt Prof. *Meyer* öffentlich in einer zu verabredenden Stunde vor.

Sanitätspolizei lehrt Prof. *Lohmeyer* fünf Mal wöchentlich von 7—8 Uhr.

Die Lehre von den Krankheiten der Hausthiere in Verbindung mit klinischen Demonstrationen im Thierhospitale trägt Dr. *Luelfing* wöchentlich sechs Mal von 7—8 Uhr vor.

Philosophie.

Allgemeine Geschichte der Philosophie: Prof. *Peip*, 6 St., 7 Uhr früh.

Geschichte der alten Philosophie: Prof. *Baumann*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 5 Uhr.

Logik: Prof. *Baumann*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 3 Uhr.

Metaphysik: Prof. *Lotze* 4 St. 10 Uhr.

Psychologie: Prof. *Bohtz*, Mont. Dienst. u. Donnerst. 1 Uhr.

Aesthetik: Prof. *Bohtz*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 4 Uhr.

Praktische Philosophie: Prof. *Lotze*, 4 St., 4 Uhr.

Religionsphilosophie: Prof. *Moller*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 10 Uhr.

Grundriss der Rhetorik: Prof. *Krüger*, 2 St., 4 Uhr.

Prof. *Baumann* wird in seiner philosophischen Societät ausgewählte Kapitel von Kants Kritik der reinen Vernunft behandeln, Mittw. 6—8 Uhr.

Prof. *Peip* wird in seiner philosophischen Societät

Freit. Abends 5—6 Uhr einen Ueberblick über die Hauptsysteme der alten und neueren Philosophie geben.

Dr. *Peipers* wird in seiner philosoph. Societät Aristoteles Metaphysik erklären.

Prof. *Moller* erbietet sich zur Leitung einer philosoph. Societät.

Geschichte der Erziehung: Prof. *Krüger*, Dienst. und Freit. 4 Uhr.

Allgemeine und besondere Unterrichtslehre und Schulkunde: Prof. *Moller*, Mont. Dienst. Donn. Freit. 12 Uhr.

Die Uebungen des K. pädagogischen Seminars leitet Prof. *Sauppe*, Donnerst. und Freit. 11 Uhr.

Die Arbeiten einer pädagogischen Societät wird Prof. *Moller* leiten.

Mathematik und Astronomie.

Die elementare und analytische Stereometrie, mit der sphärischen Trigonometrie: Prof. *Ulrich*, Mont. Dienst. Donn. Freit., 10 Uhr.

Praktische Geometrie mit Uebungen auf dem Felde: *derselbe*, 4 mal wöch. von 5—7 Uhr.

Analytische Geometrie des Raumes: Prof. *Clebsch*, Mont. Dienst. Donn. Freit. 12 Uhr.

Analytische Geometrie der Flächen und Curven doppelter Krümmung nebst den Flächen zweiten Grades: Dr. *Enneper*, Mont. Dienst. Mittw. Donn. Freit. 9 Uhr.

Theorie der Determinanten: Dr. *Enneper*, Dienst. u. Freit. 4 Uhr.

Differential- und Integralrechnung: Prof. *Stern*, 5 St. 7 Uhr.

Functionen complexer Veränderlicher, insbesondere die Eulerschen bestimmten Integrale und die Gaussischen hypergeometrischen Reihen: Prof. *Schering*, 4 St., 7 Uhr früh.

Variationsrechnung: Prof. *Stern*, Mont. Dienst. Mittw. 8 Uhr.

Theorie und Anwendung der elliptischen Functionen: Prof. *Clebsch*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 11 Uhr.

Magnetische Beobachtungen: Prof. *Schering*, für die Mitglieder des math. physikalischen Seminars, Freit. 6 Uhr.

Sphärische Astronomie: Prof. *Klinkerfues*, Mont. Dienst. Donnerst. und Freit. um 12 Uhr.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar trägt Prof. *Stern* über die Kreistheilung vor, Donnerst. 8 Uhr; behandelt Prof. *Clebsch* Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene; giebt Prof. *Klinkerfues* einmal wöch. Anleitung zu astronomischen Beobachtungen. — Vgl. Naturwissenschaften S. 92.

Naturwissenschaften.

Vergleichende Anatomie: Dr. *Grenacher*. Montag bis Donnerst. 3 Uhr.

Praktische Uebungen in Zoologie und Zootomie leitet Dr. *Grenacher* im zoologischen Museum, Mont. und Dienst. von 9—12 Uhr.

Allgemeine und specielle Botanik: Prof. *Bartling*, 6 St. 7 Uhr. — Medicinische Botanik: *derselbe*, 5 St. 8 Uhr. — Botanische Excursionen veranstaltet *derselbe* in bisheriger Weise, Demonstrationen im botanischen Garten hält er zu gelegener Zeit.

Allgemeine und specielle Botanik: Prof. *Grisebach*, 6 St. 7 Uhr, in Verbindung mit Excursionen und Demonstrationen lebender Pflanzen. — Ueber Arzneipflanzen: *derselbe*, Montag Dienstag Donnerstag und Freitag um 8 Uhr. — Praktische Uebungen in der systematischen Botanik: *derselbe*, unentgeltlich.

Allgemeine und specielle Botanik: Assessor *Lantzius-Beninga*, 6 St. wöch. Morgens 7 Uhr. — Medicinische Botanik: *derselbe*, 5 St. 8 Uhr, oder zu andern passenden Stunden. — *Derselbe* wird ein Repetitorium über allgemeine und medicinische Botanik halten und Excursionen, Demonstrationen, so wie praktische Uebungen im Zergliedern und Bestimmen der Pflanzen anstellen. — Er ertheilt auch Privatissima.

Mineralogie, erster Theil: Prof. *Sartorius von Waltershausen*, 5 St. 11 Uhr. Das mineralogische Practicum hält *derselbe* Donnerst. Nachmittag 2—4 Uhr und Sonnab. Vormittag 9—12 Uhr.

Geognosie: Prof. *von Seebach*, 5 St. 8 Uhr, verbunden mit Excursionen.

Petrographische und palaeontologische Uebungen leitet *derselbe*, Mittw. u. Donnerst. von 9—12 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Physik, ersten Theil, trägt Prof. *Weber* vor, Montag Dienstag und Mittwoch von 5—7 Uhr.

Optik: Prof. *Listing*, 4 St. um 12 Uhr.

Dioptrik des Auges und des Mikroskops für Mediciner: Prof. *Listing*, in 2 zu verabredenden Stunden.

Theorie der Anziehung: Dr. *Minnigerode*, 4 St.

Die praktischen Uebungen im physikalischen Laboratorium leitet Prof. *Kohlrausch*.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar leitet die physikalischen Uebungen Prof. *Listing* Mittwoch um 11 Uhr; Prof. *Kohlrausch*, Donnerstag um 5 Uhr. — Vgl. Mathematik S. 91.

Chemie: Prof. *Wöhler*, 6 St. 9 Uhr.

Allgemeine organische Chemie: Dr. *Hübner*, Montag bis Donnerst. 12 Uhr. — Organische Chemie, speciell für Mediciner: Prof. *von Uslar*, in später zu bestimmenden Stunden.

Einzelne Theile der theoretischen Chemie: Dr. *Stromeyer*, privatissime.

Die Grundlehren der neueren Chemie: Dr. *Hübner*, Freitag 12 Uhr.

Pharmaceutische Chemie: Prof. *von Uslar*, 4 St. 4 Uhr.

Die Vorlesungen über Pharmacie und Pharmacognosie s. unter Medicin S. 87.

Die praktisch-chemischen Uebungen und Untersuchungen im akademischen Laboratorium leitet Prof. *Wöhler* in Gemeinschaft mit den Assistenten Prof. *von Uslar*, Dr. *Hübner*, Dr. *Tollens* und Dr. *Jannasch*.

Prof. *Wicke* leitet die chemischen Uebungen für die Studirenden der Landwirthschaft.

Prof. *Boedeker* leitet die chemischen Uebungen im physiologisch-chemischen Laboratorium, täglich (ausser Sonnabend) 8—12 und 3—5 Uhr.

Historische Wissenschaften.

Entdeckungsgeschichte und Erdkunde von Amerika: Prof. *Wappäus*, Mont. Dienst. Donnerst. u. Freit. 12 Uhr.

Grundzüge der Urkundenlehre und paläographische Uebungen: Dr. *Cohn*, 3 St., 5 Uhr.

Erörterung von Thomas Buckle's Ansichten über Geschichtswissenschaft: Dr. *Cohn*, 1 St. privatissime, unentgeltlich.

Geschichte des Mittelalters: Prof. *Waitz*, 4 St., 8 Uhr.

Neuere Geschichte bis zum Westphälischen Frieden: Prof. *Pauli*, 5 St. 10 Uhr.

Deutsche Geschichte in den Jahren 1830—1848: Prof. *Droysen*, Sonnabend 12 Uhr, öffentlich.

Geschichte der deutschen Königs- und Kaiserherrschaft über Italien: Dr. *Steindorff*, Mittw. und Sonnab. 9 Uhr.

Deutsche Alterthümer: s. Alterthumskunde S. 95.

Geschichte Grossbritanniens seit 1688: Prof. *Pauli*, 4 St. 5 Uhr.

Geschichte der französischen Revolution vom Tode Ludwigs XV. bis zum J. 1804: Prof. *Droysen*, Mittw. Donnerst. Freit. 12 Uhr.

Geschichte der italienischen Communen seit dem Ende des 11. Jahrhunderts: Assessor *Wüstenfeld*, 4 St. 11 Uhr, unentgeltlich.

Gründungsgeschichte der vereinigten Staaten von Nordamerika: Dr. *Cohn*, 2 St. 5 Uhr.

Historische Uebungen leitet Prof. *Waitz*, Freitag um 6 Uhr, öffentlich. Historische Uebungen leitet Prof. *Pauli*, 1 St., öffentlich.

Kirchengeschichte: s. unter Theologie S. 83.

Staatswissenschaft und Landwirthschaft.

Encyclopädie der Staatswissenschaften: Dr. *Dede*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit., 12 Uhr.

Volkswirthschaftspolitik (praktische Nationalökonomie): Prof. *Hanssen*, 5 St. 3 Uhr.

Ueber öffentliche Armenpflege: Prof. *Hanssen*, Sonnab. 12 Uhr, öffentlich.

Einleitung in die allgemeine Statistik: Dr. *Dede*, Mittw. 12 Uhr, unentgeltlich.

Einleitung in die Bevölkerungsstatistik: Prof. *Wappäus*, Sonnabend 11 Uhr, öffentlich.

Kameralistische Uebungen: Prof. *Hanssen*, 2 St. privatissime, aber unentgeltlich.

Einleitung in das landwirthschaftliche Studium: Prof. *Drechsler*, 1 St.

Ackerbaulehre, allgemeiner und specieller Theil: Prof. *Drechsler*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 12 Uhr.

Die Theorie der Organisation der Landgüter: Prof. *Griepenkerl*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 8 Uhr.

Die allgemeine und specielle landwirthschaftliche Thierproductionslehre (Rindvieh- Schaf- Pferde- und Schweinezucht): *derselbe*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 12 Uhr.

Die Lehre vom Wiesenbau: *derselbe*, in 2 passenden Stunden, öffentlich.

Im Anschluss an diese Vorlesungen werden Demonstrationen auf benachbarten Landgütern und in Fabriken, sowie praktische Uebungen gehalten werden.

Ueber Heuwerth und Futtermischung: Prof. *Henneberg*, Mittw. 11—1 Uhr, privatim, aber unentgeltlich.

Landwirthschaftliches Practicum: Uebungen im Anfertigen landwirthschaftlicher Berechnungen (Ertragsanschläge u. s. w.); Anleitung im Gebrauch des Mikroskops: Prof. *Drechsler*, in noch zu bestimmenden Stunden.

Chemische Uebungen s. unter Naturwissenschaften S. 92.

Krankheiten der Hausthiere: s. Medicin S. 89.

Literärgeschichte.

Literaturgeschichte: Prof. *Hoeck*.

Geschichte der Literatur: Prof. *Schweiger*, 4 St.

Geschichte der Philosophie: vgl. Philosophie S. 89.

Ueber Platons Leben und Schriften: vgl. griech. und lat. Sprache S. 95.

Aeltere Geschichte der deutschen Nationallitteratur: Assessor *Tittmann*, 5 St. 9 Uhr.

Alterthumskunde.

Griechische Alterthümer: Prof. *Wachsmuth*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 12 Uhr.

Die Ideale der griechischen Götter und Heroen behandelt und erläutert nach Gypsabgüssen des akad. Museums: Prof. *Wieseler*, 3 St. 12 Uhr.

Umriss der Griechischen Numismatik, mit Vorlegung von Münzen in Originalen und Abgüssen: Prof. *Wieseler*, 2 oder 3 St. Mont. Donnerst. u. etwa Sonnab. 10 Uhr.

Lateinische Epigraphik: s. Griech. u. lat. Spr. S. 96.

Deutsche Alterthümer und Tacitus Germania: Prof. *Waitz*, 4 St. 4 Uhr.

Im K. archäologischen Seminar legt Prof. *Wieseler* öffentlich Homers Beschreibung des Achillesschildes und Hesiods Beschreibung des Herakleschildes, sowie ausgewählte Kunstwerke zur Erklärung vor, 2 St. 12 Uhr. Die Abhandlungen der Mitglieder wird er privatissime beurtheilen.

Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das A. u. N. Testament s. unter Theologie Seite 83.

Unterricht in der aethiopischen Sprache ertheilt Prof. *Bertheau*, öffentlich.

Arabische Grammatik: Prof. *de Lagarde*, 4 St. 10 Uhr.

Ausgewählte Stücke aus arabischen Schriftstellern erklärt Prof. *Wüstenfeld*, privatissime.

Den Rosengarten des Sadi nach der Ausgabe von Sprenger (Calcutta 1851) erklärt Prof. *de Lagarde*, Mittw. 10 Uhr, öffentlich.

Grammatik des Sanskrit: Prof. *Benfey*, Mont. Dienst. Mittw. 4 Uhr.

Interpretation des 2. und 3. Theiles seiner Sanskritchrestomathie: Prof. *Benfey*, Donnerst. u. Freit. 4 Uhr.

Griechische und lateinische Sprache.

Die kleineren griechischen Lyriker: Prof. *Krüger*, Mittwoch 8 Uhr, öffentlich.

Ueber Platons Leben und Schriften: Dr. *Peipers*, Mittw. 12 Uhr, unentgeltlich.

Demosthenes Rede über den Kranz: Prof. *Sauppe*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit., 9 Uhr.

Aristoteles Poetik: Dr. *Peipers*, 3 St., Mont. Dienst. Donnerst., 8 Uhr.

Aristoteles Metaphysik: vgl. Philosophie S. 90.

Geschichte der lateinischen Poesie: Prof. *v. Leutsch*, 4 St. 3 Uhr.

Lateinische Grammatik: Prof. *Sauppe*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit., 7 Uhr früh.

Tacitus Historien: Prof. *v. Leutsch*, 5 St. 10 Uhr.

Tacitus Germania: vgl. Alterthumskunde S. 95.
Lateinische Epigraphik: Dr. *Hirschfeld*, Dienst. Mittw. Donnerst. 8 Uhr.

Im K. philologischen Seminar leitet die schriftlichen Arbeiten und Disputationen Prof. *v. Leutsch*, Mittw. 11 Uhr, lässt ausgewählte Reden des Lysias erklären Prof. *Sauppe*, Donnerstag und Freitag, 11 Uhr, lässt Statius Silvae Buch I Prof. *Wachsmuth* erklären, Mont. u. Dienst. 11 Uhr, alles öffentlich.

Im philologischen Proseminar leiten die schriftlichen Arbeiten und Disputationen die Proff. *v. Leutsch, Sauppe* und *Wachsmuth*, Mittwoch 9 und 2 Uhr, Sonnabend 11 Uhr; lässt ausgewählte Reden des Lysias Prof. *Sauppe*, Mittw. 2 Uhr, Statius Silvae 3, 5 Prof. *Wachsmuth*, Sonnab. 11 Uhr erklären, alles öffentlich.

Deutsche Sprache.

Historische Grammatik der deutschen Sprache: Prof. *Wilh. Müller*, 5 St. 3 Uhr.

Die Grundzüge der altsächsischen Sprache giebt und den Heliand erklärt Prof. *Wilh. Müller*, Montag und Donnerst. 10 Uhr.

Den Parcival von Wolfram von Eschenbach erklärt Prof. *Wilh. Müller*, Dienst. Mittw. Freit. 10 Uhr.

Geschichte der deutschen Literatur: vgl. Literärgeschichte S. 12.

Die Uebungen der deutschen Gesellschaft leitet Prof. *Wilh. Müller*.

Neuere Sprachen.

Grammatik der englischen Sprache lehrt in Verbindung mit praktischen Uebungen Prof. *Theod. Müller*, Mont. Dienst. Donnerst. u. Freit. 6 Uhr Abends.

Shakespeare's König Lear erklärt *derselbe*, Dienst. Donnerst. uud Freit., 12 Uhr.

Ausgewählte Abschnitte aus Bartsch's provenzalischer Chrestomathie erläutert *derselbe*, Mont. 12 Uhr, öffentlich.

Französische Schreib- und Sprechübungen veranstaltet *derselbe*, Dienst. Mittw. Freitag und Sonnab. 8 Uhr.

Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Ueber die Baustile: Prof. *Unger*, Donnerst. 6 Uhr, öffentlich.

Unterricht im Zeichnen, wie im Malen, ertheilen Zeichenmeister *Grape*, und, mit besonderer Rücksicht auf naturhistorische und anatomische Gegenstände, Zeichenlehrer *Peters*.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen: Musikdirector *Hille* in passenden Stunden.

Derselbe ladet zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ein.

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitschule der Univ.-Stallmeister *Schweppe*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. Sonnab., Morgens von 7--11 und Nachm. (ausser Sonnab.) von 4—5 Uhr.

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grüneklee*, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Höltzke*.

Oeffentliche Sammlungen.

Die *Universitätsbibliothek* ist geöffnet Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 2 bis 3, Mittwoch und Sonnabend von 2 bis 4 Uhr. Zur Ansicht auf der Bibliothek erhält man jedes Werk, das man in gesetzlicher Weise verlangt; über Bücher, die man geliehen zu bekommen wünscht, giebt man einen Schein, der von einem hiesigen Professor als Bürgen unterschrieben ist.

Das *zoologische* und *ethnographische Museum* ist Dienstag und Freitag von 3—5 Uhr geöffnet.

Die *geognostisch-paläontologische Sammlung* ist Mittw. von 3—5 Uhr geöffnet.

Die *Gemäldesammlung* ist Donnerstag von 11—1 Uhr geöffnet.

Der *botanische Garten* ist, die Sonn- und Festtage ausgenommen, täglich von 5—7 Uhr geöffnet.

Ueber den Besuch und die Benutzung des *Theatrum anatomicum*, des *physiologischen Instituts*, der *pathologischen Sammlung*, der *Sammlung von Maschinen und*

Modellen, des *zoologischen* und *ethnographischen Museums*, des *botanischen Gartens*, der *Sternwarte*, des *physikalischen Cabinets*, der *mineralogischen* und der *geognostisch-paläontologischen Sammlung*, der *chemischen Laboratorien*, des *archäologischen Museums*, der *Gemäldesammlung*, der *Bibliothek des k. philologischen Seminars*, des *diplomatischen Apparats*, bestimmen besondere Reglements das Nähere.

Bei dem Logiscommissär, Pedell *Fischer* (Burgstr. 42), können die, welche Wohnungen suchen, sowohl über die Preise, als andere Umstände Auskunft erhalten, und auch im voraus Bestellungen machen.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

März 16. | **№ 6.** | 1870.

Man bittet die Verzeichnisse der Accessionen vom 1. Januar 1870 an zugleich als Empfangsanzeigen für die der K. Societät in Tausch übersandten Werke betrachten zu wollen. —

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. März.

Henle, Mittheilung von A. Stuart in Odessa. Neapolitanische Studien.

Sauppe, Bemerkung über das Leben des Terentius.

Wieseler, Bemerkungen über die Kästnersche Sammlung antiker Lampen.

E. Riecke, über die Ersetzung eines auf einer Oberfläche befindlichen Systems galvanischer Ströme durch eine Vertheilung magnetischer Massen.

Neapolitanische Studien
von
Dr. **Alex. Stuart** in Odessa.
(Briefliche Mittheilung an J. Henle.)

Während meines letzten Aufenthaltes in Neapel, in den Monaten September, October und November vorigen Jahres, gelang es mir, in der Frage über die Entwickelung und den Bau des Protoplosma der Radiolarien weitere Schritte zu thun.

Wie früher für Cascinosphaera, so jetzt bei einer zusammengesetzten Radiolarie, einer Varietät von Collozoum inerme, konnte ich den Hergang der Entwickelung neuer Individuen der Thiercolonie verfolgen.

Es zeigte sich nämlich, dass, wenigstens in den beobachteten Fällen, wir bei diesen polyzoën Radiolarien keineswegs mit geschlechtlichen Elementen zu thun haben. — Ein einfaches Klümpchen verdichteten Protaplasmas, welches sich auf und zwischen den Pseudopodien des erwachsenen Thieres ansammelt, wird zum Sitze der Entwicklung neuer Individuen.

Erst scheiden sich aus dem klaren Protoplasma kleine Fetttröpfchen, welche sich später in ein centrales Fetttröpfchen vereinigen; dieses wird dann zum Centrum der Ausbildung der jungen Brut.

Weiter folgt eine Trennung des Protaplasma in ein äusseres-helleres und ein inneres-dunkleres, wobei die Corticalmasse des letzteren eine dichtere Consistenz annimmt — die Centralblase.

Die so gestalteten jungen Individuen können als solche erkannt werden durch die Anwesenheit der gelben Zellen, vor allem aber von kleinen kieselartigen Krystallen, polyëdrischer Gestalt, welche für die untersuchte Art charakteristisch sind. — Die Entwickelung der gelben Zellen, welche in ihren Jugendzuständen wirkliche Zellen sind und ihre Kerne erst später verlieren, konnte in besonderen Bildungszellen des innern Protoplasma, auf dem Wege der sogenannten endogenen Zellbildung, verfolgt werden.

Meine frühere, von einigen mit Misstrauen angenommene Angabe über die Zusammen-

setzung der Cilien von Coscinosphaera aus Kalkkrystallen, konnte ich wieder bestätigen.

Der Protoplasmakörper von Actinometra besteht auch aus einem inneren feinkörnigen Theile mit Pigmenteinlagerung und einem äusseren, welcher in eine Anzahl hellerer Massen grösseren Umfanges zerfällt.

Die für Coscinosphaera beschriebenen Contractionswellen auf den Pseudopodien konnten jetzt bei mehreren Arten studiert werden.

Die, besonders durch die Arbeiten C. Vogt's, in morphologischer Beziehung bereits bekannte Medusenbrut von Velella spirans wurde in ihrer Entwickelung verfolgt, wobei folgende, höchst überraschende, embryologische Data sich ergaben: Die Medusen entwickeln sich bekanntlich als zahlreiche Knospen an den sogenannten „individus producteurs" C. Vogts. — An der Ausbildung dieser, zuerst soliden, birnförmigen Knospen nehmen alle Gewebe der Polypenwand Theil. Sie bestehen demnach aus einem äusseren und inneren Epithel, zwischen welchen die Muskelfaser- und Bindegewebsschicht sich befindet. Es erfolgt in gewöhnlicher Weise eine äussere Einstülpung, welche zur Ausbildung eines Magensackes führt, dessen Wände, von der eigentlichen Körperwand der Knospe, durch einen deutlichen Zwischenraum — einer Leibeshöhle, getrennt sind. — Durch Bindegewebswucherungen wird diese Leibeshöhle später soweit ausgefüllt, dass Platz bleibt für den Ringcanal und die vier Längscanäle des Wassergefässsystems. —

Somit besitzen die jungen Medusensprossen von Velella eine von der Magencavität gesonderte Leibeshöhle,

welche sich weiter in die Canäle des Wassergefässsystems gestaltet. —

Bei Untersuchung der Gregarinen des Regenwurms konnte die unmittelbare Beobachtung nicht ganz in Einklang gebracht werden mit den allgemein geltenden Ansichten, über den vollständigen Mangel einer besonderen digestiven Bahn bei denselben. —

Früher in Messina und jetzt in Neapel, gelang es mir, freie und eingekapselte Gregarinen im Muskelschlauche von Pterotrachea, und freie in der Leibeshöhle von Telepsavus Costarum zu finden, mit einer deutlichen Sonderung in einen Haut- und Muskelschlauch und eine innere, weichere Masse, welche da, wo dieselbe nicht vom Nucleus eingenommen war, eine besondere digestive Bahn erkennen liess.

Bei genauer Durchforschung des Nervensystems von Creseis acicula zeigte sich, dass die an und für sich richtige Darstellung von Gegenbaur, nach welchem dasselbe einen weit einfacheren Typus zeigt, als bei den übrigen Mollusken, eine keineswegs begründete ist. Die Oesophagealcommissur der Gehirnganglien erwies sich gangliöser Natur, ausserdem wurden nervöse Verbindungeu zwischen sämmtlichen Ganglien nachgewiesen, womit das Vorhandensein eines vollständigen gangliösen Schlundringes erkannt wurde.

Die Rückenganglien schicken nach oben zwei Nervenstämme, welche mit gangliösen Anschwellungen auf dem Oesophagus endigen; die zwei unteren begeben sich zum Darmcanale.

Die Bauchganglien schicken auch 4 Nervenstämme aus, welche im Muskelschlauche ihre

Endigung finden, die 2 oberen verbreiten sich im Velum, die unteren geben Aeste zu den Körperwänden und den freien Muskeln der Leibeshöhle.

Ueber die Ersetzung eines auf einer Oberfläche befindlichen Systems galvanischer Ströme durch eine Vertheilung magnetischer Massen.

von
Eduard Riecke.

(Vorgelegt von F. Kohlrausch.)

Wir werden im Folgenden ein System von geschlossenen galvanischen Strömen betrachten, deren Bahnen einer Oberfläche von beliebiger Gestalt angehören und auf dieser durch folgende Construktion geometrisch bestimmt sind. Mit der gegebenen Oberfläche denken wir uns fest verbunden eine Richtung z, welche als die Axe der Fläche bezeichnet werden soll. Diese Axe theilen wir in eine beliebige Anzahl gleich grosser hinreichend kleiner Segmente und führen durch die Mitte jedes Segments eine Ebene senkrecht zur Axe. Dem System der Ebenen, welche wir so erhalten, entspricht auf der Oberfläche ein System von Curven, und diese sind es, welche als Bahnen der galvanischen Ströme betrachtet werden sollen. Diese letzteren mögen alle von gleicher Stärke und solcher Richtung sein, dass die positiven Stromnormalen mit der positiven Richtung der Flächenaxe zusammenfallen.

Es soll nun zuerst die Wirkung untersucht werden, welche das so definirte Stromsystem auf einen ausserhalb der gegebenen Oberfläche liegenden Punkt ausübt.

Mit Bezug auf einen solchen Punkt können wir jeden einzelnen Strom unseres Systems ersetzen durch eine magnetische Doppelfläche; wenn wir die Ebenen der Strombahnen als Stromflächen benützen, und wenn wir die Abstände der beiden Blätter einer Doppelfläche gleich den zwischen je zwei Stromebenen liegenden Segmenten der Flächenaxe machen, so wird immer eine Nordpolfläche des vorhergehenden mit einer Südpolfläche des folgenden Stromes vereinigt liegen. Bezeichnen wir die Stromstärke mit i, die Zahl der Strombahnen, welche auf die Längeneinheit der Axe kommen, mit n, so ist die Dichtigkeit der Belegung sowohl auf den mit nördlichem, als auf den mit südlichem Fluidum belegten Flächen gleich $n\,i$ und es heben sich daher immer die Wirkungen der gemeinsamen Theile zweier zusammenfallender Polflächen auf. Uebrig bleiben nur die Wirkungen der ringförmigen Flächenstücke, um welche eine jener Polflächen die andere überragt. Diese ringförmigen Flächenstücke sind in den Theilen der Oberfläche, in welchen die innere Normale mit der Axe einen stumpfen Winkel macht, mit positivem, in den Theilen, in welchen jener Winkel ein spitzer ist, mit negativem magnetischen Fluidum von der Dichtigkeit $n\,i$ belegt zu denken. Jedes Element ds, welches einem jener Flächenstücke angehört, kann angesehen werden als Projection eines entsprechenden Elementes do der gegebenen Oberfläche; es ist daher

$$ds = \mp\, do.\, \cos\,(p_i, z)$$

wo das negative oder positive Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem die innere Normale p_i in dem Element do mit der Axe z einen stumpfen oder einen spitzen Winkel einschliesst.

Jedes Flächenelement ds kann also in seiner Wirkung auf einen äusseren Punkt ersetzt werden durch ein entsprechendes Element do der gegebenen Oberfläche, dieses belegt gedacht mit magnetischem Fluidum von der Dichtigkeit

$$- n i \cos (p_i, z)$$

Mit Bezug auf die Wirkung des ursprünglich gegebenen Stromsystems erhalten wir somit den Satz:

Wenn eine beliebige Oberfläche in der zu Anfang festgelegten Weise von einem System galvanischer Ströme umzogen ist, so lässt sich dieses System in seiner Wirkung auf äussere Punkte ersetzen durch eine Belegung der Oberfläche mit magnetischer Masse; die Dichtigkeit dieser Belegung ist in jedem Punkte gegeben durch

$$- n i \cos (p_i, z).$$

Hier bezeichnet i die Stromstärke, n die Zahl der Strombahnen, welche auf die Längeneinheit der Axe z kommen, und p_i die innere Normale der Fläche in dem betrachteten Punkt.

Durch eine einfache geometrische Interpretation des Ausdrucks $- n i \cos (p_i, z)$ ergiebt sich, dass jene Oberflächenbelegung aequivalent ist mit einer gleichförmigen Vertheilung magnetischer Massen innerhalb desjenigen Raumes, den unsere Oberfläche bei einer kleinen Verschiebung in der positiven Richtung der Axe

beschreibt. Bezeichnen wir durch δ die Grösse dieser Verschiebung, so ist hiebei derjenige Raum, welcher der Fläche nur in ihrer zweiten Lage angehört, erfüllt zu denken mit positivem magnetischem Fluidum von der Dichtigkeit $\frac{n i}{\delta}$, der Raum, der ihr nur in der ersten Lage angehört mit negativem Fluidum von derselben Dichtigkeit.

Wir gehen nun zweitens über zu der Wirkung, welche unser Stromsystem auf einen innerhalb der gegebenen Oberfläche liegenden Punkt P ausübt. Wenn wir in diesem Fall die Ströme unseres Systems wieder ersetzen wollten durch magnetische Doppelflächen, so würde der Punkt P innerhalb einer der Doppelflächen selbst zu liegen kommen, und die Wirkung dieser Fläche würde keinenfalls identisch mit der Wirkung des entsprechenden Stromes sein. Es ergiebt sich hieraus, dass der vorhergehende Satz nicht richtig ist, sobald der betrachtete Punkt im Innern der Oberfläche liegt, dass also dieser Fall einer besonderen Untersuchung bedarf.

Die Axe der Fläche, welche wir durch den Punkt P senkrecht zu den Ebenen der Ströme hindurchlegen, machen wir zur z Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen anfangspunkt wir auf dieser Axe beliebig wählen können. Die Componenten der Kraft, welche das gegebene Stromsystem auf den Punkt P ausübt, nach den Coordinatenaxen seien X_i, Y_i, Z_i; die Componenten derjenigen Wirkung, welche die das Stromsystem in Bezug auf äussere Punkte vertretende Oberflächenbe-

legung auf denselben Punkt P ausübt, seien X_m, Y_m, Z_m.

Die Axe z schneide die Ebenen zweier zu beiden Seiten von P befindlicher Ströme AB und CD in den Punkten E und F. Innerhalb der Stromebenen AB und CD beschreiben wir um E und F Kreise von gleichem Halbmesser und machen dieselben zu Grundflächen eines Cylinders, dessen Axe mit der Axe z zusammenfallen wird. Der Cylinder wird von allen zwischen AB und CD befindlichen Stromebenen in ebensovielen Kreisen durchschnitten; denken wir uns diese Kreise von Strömen von der Stärke i so durchströmt, dass die positiven Stromnormalen mit der Axe z dieselbe Richtung besitzen, so repräsentiren sie in ihrer Gesammtheit ein Solenoid, welches auf den in seiner Axe liegenden Punkt P eine Kraft ausübt, deren Componenten mit ξ_i, η_i, ζ_i. bezeichnet werden mögen. In seiner Wirkung auf äussere Punkte kann dieses Solenoid ersetzt werden durch eine gleichförmige Belegung seiner Endflächen mit magnetischem Fluidum; die Componenten der Wirkung, welche diese Belegung auf den im Inneren des Solenoides gelegenen Punkt P ausübt, seien ξ_m, η_m, ζ_m. Durch eine Betrachtung, welche der früher angewandten ganz analog ist, ergiebt sich, dass zwischen den Componenten der verschiedenen angeführten Wirkungen folgende Beziehungen stattfinden:

$$X_i - X_m = \xi_i - \xi_m$$
$$Y_i - Y_m = \eta_i - \eta_m$$
$$Z_i - Z_m = \zeta_i - \zeta_m$$

Die Componenten ξ_i, η_i, ξ_m und η_m sind einzeln gleich Null. Dagegen ist (Neumann, Crelle's Journal, Band 37.)

$$\zeta_i - \zeta_m = 4\pi\, n\, i\, \mu$$

wo n und i dieselbe Bedeutung haben wie früher, und μ die magnetische Masse des Punktes P bezeichnet.

Mit Bezug auf die Wirkung unseres Stromsystems auf den Punkt P gelangen wir demnach zu folgendem Resultat:

Zerlegen wir die Wirkung, welche ein in der zu Anfang festgestellten Weise eine Oberfläche bedeckendes Stromsystem auf einen innerhalb der Oberfläche liegenden magnetischen Punkt ausübt, in ihre Componenten senkrecht und parallel zur Flächenaxe, so ist die erstere identisch mit der entsprechenden Componente derjenigen Wirkung, welche die das Stromsystem in seiner Wirkung auf äussere Punkte vertretende Oberflächenbelegung auf denselben Punkt ausübt. Dagegen findet zwischen den der Axe parallelen Componenten beider Wirkungen eine Differenz statt, welche für alle Punkte im Innern der Fläche constant ist, nemlich gleich dem Produkt aus 4π in die Stromstärke, die Zahl der Strombahnen auf der Längeneinheit der Axe und die Masse des betrachteten Punktes.

Wenn die gegebene Oberfläche ein Elipsoid ist, so ist die Wirkung der entsprechenden Oberflächenbelegung für alle Punkte im Inneren

constant; gleiches gilt daher auch von einem Stromsysteme, das in der angegebenen Weise die Oberfläche des Ellipsoides überzieht. Es würde also ein solches Stromsystem einen Multiplikator repräsentiren, welcher auf alle Punkte in seinem Innern eine constante Kraft ausübt.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

März 1870.

Grenwich observations. 1867. London. 1869. 4.
Catalogue of scientific papers. Vol. III. Ebd. 1869. 4.
P. Niemeyer, Theorie der Herz-Gefäss- und Lungengeräusche. 8.
R. Wolf, astronomische Mittheilungen. 8.
v. Tröltsch, anatomische Beiträge zur Lehre von der Ohren-Eiterung. Würzburg. 1869. 8.
Th. Wechniakof, introduction aux recherches sur l'économie des travaux scientifiques et esthétiques. Paris. 8.
C. v. Littrow, über das Zurückbleiben der Alten in den Naturwissenschaften. Wien. 1869. 8.
Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1869. Bd. XIX. Nr. 4. October, November, December.
Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Nr. 14—18. 1869.
I u. II Jahresbericht des akademischen Lesevereins zu Graz. 1868 und 69. 8. Graz. 1870. 8.
VIII Jahresbericht des akad. Lesevereins zu Wien. 1868—69. Wien 1870. 8.
Monatsbericht der königl. Akademie d. W. zu Berlin. December 1869.
Sitzungsberichte der königl. Akademie d. W. zu München. 1869 I. Hft. 4. — II. Hft 1. 2.
Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft in Leipzig. Jahrg. IV. Hft. 4.
Tafeln zur Reduction von Fixstern-Beobachtungen für 1726—1750. Leipzig. 1869. 8.

Preisschriften herausg. von der fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig. XIV. XV. Leipzig 1869. 8. XVI. Bericht der Philomathie in Neisse. 1867—69. Neisse. 1869. 8.

Archives Néerlandaises. T. IV. La Haye. 1869. 8.

Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit. Jahrg. XVI. 1869. Nr. 1—12. Nürnberg.

Mittheilungen des historischen Vereins für Krain. Jahrg. 23. 1868.

Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft. Bd. 23. Hft. 4. Leipzig 1869. 8.

Extraits des Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Ebd. 1869. 8. Bogen a.

Nature, a weekly illustrated Journal of Science. Nr. 5—18. 1870. 8.

Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Sextende Bind første, andet og tredie, fjerde Hefte. Christiania. 1869. 8.

P. Botten-Hansen, la Norvège littéraire. Ebd. 1868. 8.

E. Hertzberg, Aristokratie. Ebd. 1869. 8.

C. R. Unger, Thomas Saga Erkibyskups. Ebd. 1869. 8.

S. A. Sexe, le glacier de Boium. Ebd. 1869. 4.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aaar 1868. Ebd. 1869. 8.

Forhandlinger ved de Skandinaviske Naturforskeres tiende möde i Christiania Ebd. 1869. 8.

Det kong. Norske Frederiks Universitets Aarsberetning for Aaret 1868. Ebd. 1869. 8.

Beretning om Bodsfaengstets Vieksomhed i Aaret 1868. Ebd. 1869. 8.

C. P. Caspari Quellen zur Geschichte des Taufsymbols und der Glaubensregel. II. Ebd. 1869. 8.

Beskrivelse af Bursae, Mucosae af A. S. D. Synnestvedt. Ebd. 1869. 4.

Fartegnelse over de Forelaesninger der skulle holdes vet det Kong. Frederiks Universitet i dets hundrede og tolvte Halvaar fra Midten af Januar Moned 1869. Ebd. 1869. 4.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

März 30. **№ 7.** 1870.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Die Angaben über Terentius Lebenszeit.

von

Hermann Sauppe.

Für eine genauere Bestimmung der Zeit, in welcher P. Terentius gelebt habe, liegen drei Angaben vor. Erstens sagt Suetonius in der vita Terentii p. 32,13 Reiff.: *Q. Cosconius redeuntem e Graecia perisse in mari dicit cum fabulis conversis a Menandro: ceteri mortuum esse in Arcadia sive Leucadiae tradunt, Cn. Cornelio Dolabella M. Fulvio Nobiliore consulibus, morbo implicatum ex dolore ac taedio amissarum sarcinarum, quas in nave praemiserat, ac simul fabularum, quas novas fecerat.* Und auf Suetonius gehen ohne Zweifel auch die übereinstimmenden Zeugnisse bei Hieronymus ol. CLV, 3: *P. Terentius Carthaginiensis comoediarum scribtor ob ingenium et formam libertate donatus in Arcadia moritur* (Schöne p. 127) und in der vita ambrosiana (b. Ritschl in Reifferscheids Suetonii reliquiae p. 536): zurück *Stymphali decessit in Arcadia publiceque sepultus est, Cn. Dolabella Fulvio*

Nobiliore consulibus.— Zweitens heisst es bei Suetonius in der vita p. 32, 4 R.: *Post editas comoedias, nondum quintum atque vicesimum ingressus annum — egressus urbe est neque amplius rediit.* Ob hier nach Ritschls scharfsinniger Vermuthung wirklich *ingressus* gelesen werden müsse oder das handschriftliche *egressus* behalten werden könne, ist zunächst nicht von grosser Bedeutung. Aber mit vollem Recht haben C. L. Roth (vgl. Rh. Mus. 12 S. 182 ff.) und Ritschl p. 512 sq. die Lesart *vicesimum* des alten codex parisinus A für die allein der ganzen übrigen Darstellung des Suetonius entsprechende erklärt, da seine Ueberzeugung, dass Terentius mit Laelius und Scipio gleichen Alters, nicht nach der Meinung Fenestellas älter gewesen sei, in deutlichen Anzeichen hervortritt. Die vor Roths Ausgabe allgemein beibehaltene Lesart der jüngern HSS. *tricesimum,* die auch in den Geschichten der römischen Literatur (selbst Bernhardys §. 77) allgemeine Annahme gefunden hat, kann nur als willkürliche Aenderung eines Gelehrten gelten, der die dichterische Thätigkeit des Terentius mit so jugendlichem Alter nicht verträglich erachtete. — Die dritte Angabe endlich ist in der vielfach bezeugten Ueberlieferung enthalten, dass Terentius mit C. Laelius und P. Scipio Aemilianus gleichen Alters gewesen sei. Dies wurde gegen Ausgang des siebenten Jahrhunderts der Stadt allgemein geglaubt: denn in diese Zeit gehören Porcius Licinus, nach dessen Versen (vita Suet. p. 27,9) über die Schönheit des Terentius und ihre Wirkung auf Laelius, Scipio und Furius wir ihn eher für jünger als diese halten sollten, Santra, der wegen dieses gleichen Alters meint, dass Terentius bei seinen Dichtungen nicht der Bei-

hülfe so junger Leute, sondern älterer Männer sich bedient und gerühmt habe (vita Suet. p. 31,10), C. Memmius, offenbar der jüngere, Sullas Schwiegersohn, der viel mit Dichtern, Catullus, Helvius Cinna, Lucretius, verkehrte und deshalb, ähnlich wie einst Fulvius Nobilior, angegriffen worden war (vita Suet. p. 30,14). Aus wenig späterer Zeit, dem Anfang des achten Jahrhunderts, kommen Cornelius Nepos (vita Suetonii p. 27,6 und 31,2) und Cicero hinzu, der de amic. §. 89 Laelius den Terentius seinen *familiaris* nennen lässt (vgl. ad Att. 7. 3,10). Dieselbe Ansicht hatte ohne Zweifel auch Varro ausgesprochen, da Suetonius, der nach Ritschls Erörterungen (Parerga plaut. 1 p. 244. 622 f. zur vita Ter. p. 515. 518. vgl. Reifferscheid Suet. reliqu. p. 423) für die älteren Dichter vorzüglich Varros Bücher de poetis benutzt hatte, sonst ohne Zzeifel auch anders geurtheilt haben würde. Obgleich nun Fenestella unter Tiberius, wie wir sogleich sehn werden, sich in anderem Sinne aussprach, so drang er doch nicht durch, sondern noch Vagellius (bei Donatus de vita Terentii p. 35,6 Reiff. vgl. Ritschl dazu p. 530 sq. Bergk Philol. 16 S. 635 f.), wenn der Zeitgenosse des Seneca zu verstehen ist, und Quintilianus 10. 1, 99 glauben, dass Scipio Terentius bei seinen Dichtungen unterstützt habe, halten also wol auch an der Ueberlieferung über die Freundschaft und das gleiche Alter derselben fest.

Sind denn aber alle diese drei Angaben gleich sicher oder müssen wir auch bei dem Leben des Terentius, wie so häufig in der Literaturgeschichte der Griechen und Römer, unverdächtige Ueberlieferung von späteren Berechnungen und Vermuthungen zu scheiden suchen?

Wie wenig Sicheres über die Lebensumstände desselben überhaupt bekannt war, lehrt uns der Niederschlag, den wir aus den Werken der früheren Literarhistoriker bei Suetonius vor uns haben. Und das darf uns noch weniger als in andern ähnlichen Fällen bei einem Dichter Wunder nehmen, der aus der Dunkelheit des Sclavenstandes aufgetaucht und dann wie ein Meteor nach kurzem Leuchten wieder in das Dunkel der Ferne verschwunden war. Unverdächtig erscheinen die Angabe über das Todesjahr mit seinen Consulen und der Kern der Ueberlieferung über den vertrauten Verkehr mit C. Laelius Sapiens, P. Scipio Aemilianus und L. Furius Philus, wenn auch ausschmückende Erfindsamkeit Manches hinzugefügt haben mag. Die Todeszeit ist häufig bei Männern, die durch Schriften sich mühsam einen Namen errangen, das Einzige, was man von ihren persönlichen Verhältnissen angemerkt hat und weiss, die Erinnerung an die auffallende Vertrautheit mit den ersten Männern des Staates und der Gesellschaft erhielt sich mit dem Glanze ihrer Namen.

Anders steht es mit dem Alter, in welchem der Dichter Rom verlassen habe. Wenn darüber eine Ueberlieferung vorlag, so war auch das Geburtsjahr des Dichters bekannt, davon aber ist nirgends eine Spur, nirgends eine Angabe zu finden. Und entschieden gegen das Vorhandensein einer solchen Ueberlieferung spricht, was uns Suetonius aus Fenestella berichtet, p. 27,2: *hic cum multis nobilibus familiariter vixit, sed maxime cum Scipione Africano et C. Laelio, quibus etiam corporis gratia conciliatus existimatur. quod et ipsum Fenestella arguit, contendens utroque majorem natu fuisse.* In dem Wenigen, was wir von Fenestella wissen

(Bernhardy R. L. G. p. 649[4]. 652), erscheint er als gelehrter, scharfsinniger Mann und natürlich hatte er die Schriften Varros und Anderer über Terentius so gut als Suetonius. Wenn in diesen eine bestimmte Angabe über das Lebensalter des Dichters vorlag, so konnte er nicht behaupten, dass derselbe älter als Laelius und Scipio gewesen sei. Dies konnte er nur, wenn entweder über dieses Alter auch Anderes überliefert war, oder wenn nichts Bestimmtes bezeugt war, aber Umstände vorlagen, welche Vermuthung gegen Vermuthung zu stellen gestatteten und berechtigten. Warum stellt denn ferner Suetonius der Behauptung Fenestellas nicht einfach diese Angabe über Terentius Geburtsjahr entgegen, sondern fährt nur mit den unbestimmten Worten fort: *quamvis et Nepos aequales omnes fuisse tradat et Porcius suspicionem de consuetudine per haec faciat*: ***Dum lasciviam*** — ? Alles erklärt sich, wenn wir die Angabe über das 25. Lebensjahr nur als Vermuthung und Berechnung erkennen, nach deren Gründen wir fragen und der wir auch eine andere gegenüberstellen dürfen, sobald wir sie begründen können. Wenn wir nun fragen, worauf sich dies 25. Jahr gründe, so liegt die Antwort nahe: *auf die Ueberlieferung von dem gleichen Alter des Terentius und P. Scipio und das sicher bezeugte Geburtsjahr des letzteren.* Durch eine Menge von einander unabhängiger und dennoch genau übereinstimmender Angaben (zu den Stellen bei Roth Rh. Mus. 12 S. 183 kommen noch andere, vor allen Cic. de Rep. 6 §. 12) steht fest, dass P. Scipio im J. 569 = 185 v. Chr. geboren war. Also hatte er 594 = 160, als bei den von ihm und seinem Bruder Q. Fabius Maximus Aemilianus veranstalteten

ludi funebres ihres Vaters L. Aemilius Paulus sowol das letzte Stück des Terentius, die Adelphoe, als die Hecyra, diese zum zweitenmal, aufgeführt wurden, das 25. Jahr noch nicht vollendet. Wenn also Terentius gleich alt war, so hatte auch er, als er bald nach der Aufführung die Stadt verliess, das 25. Jahr noch nicht vollendet. Man begreift, wie bei dieser Gelegenheit, die auch öffentlich die Namen der Freunde verknüpfte, Varro oder ein Anderer diese Angabe hinzuzufügen sich berechtigt glauben konnte, die nur auf seiner, allerdings scheinbar richtigen Rechnung beruhte. Es geht aber aus dieser Betrachtung auch hervor, dass die Lesart aller HSS. *egressus* gegen Ritschl's Vermuthung *ingressus* festgehalten werden müsse. Ebenso ergiebt sich die Nothwendigkeit der Lesart *quintum atque vicesimum*, während *tricesimum* dem Fenestella offenbar Recht geben und die Ansicht des Suetonius als falsch erweisen würde. Wenn wir so durch diese Angabe nicht mehr genöthigt sind von vorne herein die Ansicht Fenestellas als unmöglich zu verwerfen, so wird es nicht schwer sein zu erkennen, dass er sehr gewichtige Gründe für seine Vermuthung anführen konnte, wenn ihm nicht etwa auch äussere Zeugnisse oder Anhaltspunkte zu Gebote standen.

Die Andria, Terentius erstes Stück, wurde an den Megalesien des J. 588 = 166 v. Chr. aufgeführt (vgl. die Didaskalie und vita Suet. p. 31,13). Wenn wir daher auch Ritschls Vermuthung als richtig gelten lassen (in vit. Terentii p. 497), dass bei Hieronymus Ol. 150,2 zu lesen sei: *mortuus est* (Caecilius) *anno post mortem Ennii III et iuxta eum in Janiculo sepultus*, so fällt doch immer die Abfassung der-

selben, da die Megalesien im Anfang April gefeiert wurden und wir einige Zeit auf die Anmeldung bei den Aedilen, die Vorlesung bei Caecilius Statius, die Einübung durch die Schauspieler rechnen müssen, in das 17. Lebensjahr des Dichters. Geradezu unmöglich ist das nicht, soviel müssen wir Ritschl (in vit. Ter. p. 515) zugeben, aber sehr unwahrscheinlich bleibt es dennoch. Wenn auch Terentius als Knabe in das Haus des Senator Terentius Lucanus kam, so bedurfte es doch, um auf seine Begabung aufmerksam zu werden, den nöthigen Unterricht für feine Ausbildung (institutus liberaliter) zu geniessen, die Freilassung zu erlangen, allerlei Versuche in der Uebersetzung aus dem Griechischen und der Dichtung von Lustspielen zu machen, geraumer Zeit. Viel einfacher gestaltet sich alles, wenn wir annehmen, dass Terentius mehrere Jahre älter war. Wie viele, das lässt sich nicht bestimmen, aber in jedem Falle brauchen wir deshalb nicht die Angabe zu verwerfen, dass er und die oft genannten jungen Freunde griechischer Bildung *aequales* gewesen seien. Das bleibt immer wahr, wenn auch Terentius 6—8 Jahr älter war. Wer die jungen Männer mit einander verkehren sah, achtete auf den geringen, kaum äusserlich bemerkbaren Unterschied nicht, beurtheilte vielmehr das unbekannte Alter des Begünstigten nach dem wohlbekannten der Gönner und betrachtete sie als *aequales*. So vererbte sich die Annahme auf die kommenden Geschlechter. Ich glaube also, dass sowohl Fenestella Recht hatte, als die, welche Scipio und Terentius *aequales* nannten, nur der, welcher aus dieser Bezeichnung das 25. Lebensjahr des Dichters berechnete, und Suetonius im Unrecht waren, wenn er

Fenestella durch Zeugnisse widerlegen zu können meinte, in denen von *aequales* die Rede war.

Noch eine Frage hängt mit dem Erörterten zusammen, in welchem Sinne Terentius die bekannten Verse im Prolog der Adelphoe verstanden wissen wollte:

Nam quod isti dicunt malevoli, homines nobilis
Hunc adiutare adsidueque una scribere:
Quod illi male dictum uemens esse existumant,
Eam laudem hic ducit maxumam, quom illis placet,
Qui vobis univorsis et populo placent,
Quorum opera in bello, in otio, in negotio
Suo quisque tempore usust sine superbia.

Die gewöhnliche Auffassung war schon im Alterthum die, dass Terentius unter den *homines nobilis* Laelius und Scipio verstanden und deshalb den Vorwurf, dass er von ihnen beim Dichten seiner Stücke unterstützt werde, nicht zurückgewiesen, sondern anerkannt habe, weil er gewusst, dass seine Freunde gern einen Theil des Beifalls, der seinen Stücken zu Theil werde, sich zufallen sähen (vita Suet. p. 30, 2 sqq.). Thörichter Scharfsinn vertheilte dann das Gesagte so, wie bei Donatus sich findet, dass *in bello* auf Scipio, *in otio* auf Furius, *in negotio* auf Laelius gehe. Santra dagegen (vita Suet. p. 31, 10 sqq.) meinte, dass Terentius, wenn er einer Unterstützung, eines Beirathes beim Dichten bedurfte, nicht sich an so junge Leute, wie Scipio und Laelius, sondern an Männer, wie C. Sulpicius Gallus, Q. Fabius Labeo, M. Popillius, beides, des öffentlichen Lebens und der Poesie kundig, gewendet haben werde. Deshalb deute er auch auf *Männer, quorum operam et in bello et in otio et in negotio populus sit expertus.* In neuerer Zeit ist man meistens der ersten Deutung gefolgt und noch R. Klotz sucht sie

zur Andria S. 3 f. zu vertheidigen. Aber Ritschl (zur vita Terentii p. 513) und Th. Mommsen (R. G. 2 S. 444) urtheilen mit Recht, dass die Worte des Terentius, wenn sie auf die jungen Männer bezogen werden sollten, eine arge Uebertreibung enthalten würden, die man dem Dichter nicht zutrauen dürfe. Ritschl findet deshalb die Deutung des Santra richtig, dass man an ältere Männer zu denken habe, wenn auch die von Santra Genannten nur beispielsweise genannt seien. Mommsen findet diese Deutung Santras wenigstens verständiger, als die andere, obgleich es freilich offenbar auch nur Vermuthung sei.

Ist es denn aber überhaupt nothwendig hier bei den *homines nobilis* an bestimmte Personen zu denken? Mir scheint vielmehr folgende Erklärung die richtige zu sein. Man machte dem Terentius den Vorwurf — und wir haben wol auch hier wieder an Luscius Lanuvinus zu denken, den der Dichter im Prolog des Heautontimorumenos v. 22 ausdrücklich nennt —, dass er, der Sclave und Freigelassene, sich an vornehme Herren vom Adel (*homines nobilis*) andränge und von ihnen helfen lasse. Darauf erwiedert der Dichter, diese vornehmen Herren des Adels seien es, die das Wohl des Staates und der Einzelnen in Krieg und Frieden förderten, jeder nehme, ohne spröde zu thun, zu ihnen seine Zuflucht, wenn er es bedürfe; auch er schätze sich also zur grössten Ehre, wenn er solchen Männern dieser Kreise gefalle, „die bei allen in Ansehn ständen. Wenn er sich der Gunst und Beihülfe Vornehmer freue, so thue er nichts, als was alle bei ihnen passender Gelegenheit thäten. Er vertheidigt also sich und sein Verhältniss zu bestimmten Persönlich-

keiten der höchsten Kreise, indem er die Betrachtung erweitert und im Allgemeinen es als etwas durchaus Ehrenhaftes und Ehrenvolles bezeichnet, Hochstehenden zu gefallen, natürlich nicht allen, sondern denen, welche durch Verdienst irgend einer Art die Anerkennung des Volkes erworben haben. Er thut, was die Lehrer der Beredsamkeit empfehlen: *a propriis personis et temporibus ad universi generis orationem quaestionem traducit* (Cic. orat. §. 46). Verdächtigungen und Vorwürfe, wie die, gegen welche sich Terentius hier vertheidigt, mochten damals in Rom häufig genug vorkommen. Natürlich vernahm, wer diese Verse hörte und las, nicht nur den allgemeinen Gedanken, sondern dachte zugleich an den besondern Fall und verstand also unter den *homines nobilis* in diesem Falle Laelius und Scipio, deren vertrauter Umgang mit dem Dichter bekannt war und von denen allein gesagt wurde, dass sie dem Dichter bei seinen Stücken zu helfen pflegten. Mit Recht sagt also Suetonius, oder eigentlich wohl Varro, dass Terentius durch die Art, wie er sich vertheidige, das Gerücht nur bestätigt und ihm grössere Verbreitung gegeben habe.

Noch eine Bemerkung will ich hier über die vita Suetonii hinzufügen, um durch dieselbe zum Anfang meines kleinen Aufsatzes zurückzukehren und so ihn abzuschliessen. Sueton pflegt bei einzelnen von seiner Ansicht und Darstellung abweichenden Angaben die Urheber derselben zu nennen, für die von ihm gebilligte Auffassung und Angabe den Gewährsmann nicht anzuführen. So stehen sich auch p. 32,13 zwei Nachrichten über die Art, wie Terentius gestorben sei, gegenüber. Q. Cosconius, von dem man nur soviel weiss, dass er vor Varro ge-

schrieben habe (Ritschl zur vita Terentii p. 518), hatte erzählt, dass Terentius mit den neuen Stücken, die er aus Menander übersetzt, auf dem Meere umgekommen sei; die andere, gewöhnliche Erzählung lautete, dass der Dichter sein Gepäck mit den neuen Stücken zu Schiff vorausgeschickt habe, dann aber, als er deren Untergang gehört, nach Stymphalus in Arkadien gegangen und dort vor Kummer erkrankt und gestorben sei. Diese beiden Erzählungen schliessen sich gegenseitig aus: wer ihn nach Stymphalos gehen liess, konnte ihn nicht in Leukas sterben lassen. Daher hat Fleckeisen (krit. Miscellen S. 59 ff.) Recht, dass die Erwähnung von Leucadia zu der ersten Nachricht gehört, die nicht der näheren Bezeichnung des Ortes entbehren kann, wo Terentius auf dem Meere umgekommen sei. Dass aber das Meer bei Ambrakia oder Leukas als dieser Ort angegeben wurde, belegt Fleckeisen trefflich durch den Schol. zu Lucanus Pharsalia 5, 651 f. *oraeque malignos Ambraciae portus]* malignos autem dixit, quoniam est ibi Terentius mortuus (p. 181 f. Usener). So verschwindet auch der Grund, der Ritschl bestimmte, das handschriftliche *Stymphali* nach *in Arcadia* zu streichen, und wir werden als das von Suetonius Geschriebene ansehen dürfen: *Q. Cosconius redeuntem e Graecia perisse in mari [in] sinu Leucadiae cum centum et octo fabulis conversis a Menandro, ceteri mortuum esse in Arcadia Stymphali tradunt.* Oder darf man auf die Lesart *siue Leucadie* im cod. *A* die Vermuthung stützen: *in mari [i]sule leucadie* d. h. *in mari insulae Leucadiae?* Die Worte *centum et octo,* so sinnreich Ritschls Vermuthung ist sie als blosse Wiederholung der Praeposition *cum* zu streichen, scheinen mir doch mit den HSS. be-

halten werden zu müssen, da die Angabe *cum fabulis* ohne weiteren Zusatz allzukahl und bedeutungslos sein würde, wie schon Bergk bemerkte (Philol. 16 S. 634).

Preisaufgaben
der
Wedekindschen Preisstiftung
für Deutsche Geschichte.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte macht hiermit wiederholt die Aufgaben bekannt, welche für den dritten Verwaltungszeitraum, d. h. für die Zeit vom 14. März 1866 bis zum 14. März 1876, von ihm ingemäss der Ordnungen der Stiftung gestellt worden sind.

Für den ersten Preis.

Der Verwaltungsrath verlangt

eine Ausgabe der verschiedenen Texte der lateinischen Chronik des Hermann Korner.

Für den letzten Verwaltungszeitraum war eine Ausgabe der verschiedenen Texte und Bearbeitungen der Chronik des Hermann Korner verlangt und dabei sowohl an die handschriftlich vorhandenen deutschen wie die lateinischen Texte gedacht. Seit dem ersten Ausschreiben dieser Preisaufgabe hat sich aber die Kenntnis des zu benutzenden Materials in überraschender

Weise vermehrt: zu der von der bisherigen Ausgabe der Chronica novella stark abweichenden Wolfenbütteler Handschrift sind zwei andere in Danzig und Linköping gekommen, die jenes Werk in wieder anderer Gestalt darbieten (vgl. Waitz, Ueber Hermann Korner und die Lübecker Chroniken, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Bd V, und einzeln Göttingen 1851. 4., Nachrichten 1859 Nr. 5 S. 57 ff. und 1867 Nr. 8 S. 113); ausserdem ist in Wien ein Codex der deutschen Bearbeitung gefunden, der den Korner auch als Verfasser dieser bestimmt erkennen lässt (Peiffer, Germania IX, S. 257 ff.).

Auch jezt noch würde eine zusammenfassende Bearbeitung aller dieser Texte das Wünschenswertheste sein. Da aber eine solche nicht geringe Schwierigkeiten darbietet, so hat der Verwaltungsrath geglaubt, bei der für den neuen Verwaltungszeitraum beschlossenen Wiederholung die Aufgabe theilen und zunächst eine kritische Edition der verschiedenen Texte der lateinischen Chronik fordern zu sollen.

Hier wird es darauf ankommen zu geben:

1) den in der Wolfenbütteler Handschrift, Helmstad. Nr. 408, enthaltenen Text einer ohne Zweifel dem Korner angehörigen Chronik, als die älteste bekannte Form seiner Arbeit;

2) alles was die Danziger und Linköpinger Handschrift Eigenthümliches darbieten und ausserdem eine Nachweisung ihrer Abweichungen von den andern Texten und unter einander, so dass die allmähliche Entstehung und Bearbeitung des Werkes erhellt;

3) aus der letzten und vollständigsten Bearbeitung der Chronica novella, die bei Eccard (Corpus historicum medii aevi II) gedruckt ist,

wenigstens von der Zeit Karl des Grossen an, alles das was nicht aus Heinrich von Herford entlehnt und in der Ausgabe desselben von Potthast bezeichnet ist, unter Benutzung der vorhandenen Handschriften, namentlich der Lübecker und Lüneburger.

Es wird bemerkt, dass von dem Wolfenbütteler, Danziger und Linköpinger Codex sich genaue Abschriften auf der Göttinger Universitäts-Bibliothek befinden, die von den Bearbeitern werden benutzt werden können, jedoch so dass wenigstens bei der Wolfenbütteler Handschrift auch auf das Original selbst zurückzugehen ist.

In allen Theilen ist besonders auf die von Korner benutzten Quellen Rücksicht zu nehmen, ein genauer Nachweis derselben und der von dem Verfasser vorgenommenen Veränderungen sowohl in der Bezeichnung derselben wie in den Auszügen selbst zu geben. Den Abschnitten von selbständigem Werth sind die nöthigen erläuternden Bemerkungen und ein Hinweis auf andere Darstellungen, namentlich in den verschiedenen Lübecker Chroniken, beizufügen.

Eine Einleitung hat sich näher über die Person des Korner, seine Leistungen als Historiker, seine eigenthümliche Art der Benutzung und Anführung älterer Quellen, den Werth der ihm selbständig angehörigen Nachrichten, sodann über die verschiedenen Bearbeitungen der Chronik, die Handschriften und die bei der Ausgabe befolgten Grundsätze zu verbreiten.

Ein Glossar wird die ungewöhnlichen, dem Verfasser oder seiner Zeit eigenthümlichen Ausdrücke zusammenstellen und erläutern, ein Sachregister später beim Druck hinzuzufügen sein.

Für den zweiten Preis.

Wie viel auch in älterer und neuerer Zeit für die Geschichte der Welfen und namentlich des mächtigsten und bedeutendsten aus dem jüngeren Hause, Heinrich des Löwen, gethan ist, doch fehlt es an einer vollständigen, kritischen, das Einzelne genau feststellenden und zugleich die allgemeine Bedeutung ihrer Wirksamkeit für Deutschland überhaupt und die Gebiete, auf welche sich ihre Herrschaft zunächst bezog, insbesondere in Zusammenhang darlegenden Bearbeitung.

Indem der Verwaltungsrath

eine Geschichte des jüngern Hauses der Welfen von 1055—1235 (von dem ersten Auftreten Welf IV. in Deutschland bis zur Errichtung des Herzogthums Braunschweig-Lüneburg)

ausschreibt, verlangt er sowohl eine ausführliche aus den Quellen geschöpfte Lebensgeschichte der einzelnen Mitglieder der Familie, namentlich der Herzoge, als auch eine genaue Darstellung der Verfassung und der sonstigen Zustände in den Herzogthümern Baiern und Sachsen unter denselben, eine möglichst vollständige Angabe der Besitzungen des Hauses im südlichen wie im nördlichen Deutschland und der Zeit und Weise ihrer Erwerbung, eine Entwicklung aller Verhältnisse, welche zur Vereinigung des zuletzt zum Herzogthum erhobenen Welfischen Territoriums in Niedersachsen geführt haben. Beizugeben sind Register der erhaltenen Urkunden, jedenfalls aller durch den Druck bekannt gemachten, so viel es möglich auch solcher die noch nicht veröffentlicht worden sind.

In Beziehung auf die Bewerbung um diese Preise, die Ertheilung des dritten Preises und die Rechte der Preisgewinnenden ist zugleich Folgendes aus den Ordnungen der Stiftung hier zu wiederholen.

1. Ueber die zwei ersten Preise. Die Arbeiten können in deutscher und lateinischer Sprache abgefasst sein.

Jeder dieser Preise beträgt 1000 Thaler in Gold, und muss jedesmal ganz, oder kann gar nicht zuerkannt werden.

2. Ueber den dritten Preis. Für den dritten Preis wird keine bestimmte Aufgabe ausgeschrieben, sondern die Wahl des Stoffs bleibt den Bewerbern nach Massgabe der folgenden Bestimmungen überlassen.

Vorzugsweise verlangt der Stifter für denselben ein deutsch geschriebenes Geschichtsbuch, für welches sorgfältige und geprüfte Zusammenstellung der Thatsachen zur ersten, und Kunst der Darstellung zur zweiten Hauptbedingung gemacht wird. Es ist aber damit nicht bloss eine gut geschriebene historische Abhandlung, sondern ein umfassendes historisches Werk gemeint. Speciallandesgeschichten sind nicht ausgeschlossen, doch werden vorzugsweise nur diejenigen der grösseren (15) deutschen Staaten berücksichtigt.

Zur Erlangung dieses Preises sind die zu diesem Zwecke handschriftlich eingeschickten Arbeiten, und die von dem Einsendungstage des vorigen Verwaltungszeitraums bis zu demselben Tage des laufenden Zeitraums (dem 14. März des zehnten Jahres) gedruckt erschienenen Werke dieser Art gleichmässig berechtigt. Dabei findet indessen der Unterschied statt, dass die ersteren, sofern sie in das Eigenthum der Stiftung über-

gehen, den vollen Preis von 1000 Thalern in Golde, die bereits gedruckten aber, welche Eigenthum des Verfassers bleiben, oder über welche als sein Eigenthum er bereits verfügt hat, die Hälfte des Preises mit 500 Thalern Gold empfangen.

Wenn keine preiswürdigen Schriften der bezeichneten Art vorhanden sind, so darf der dritte Preis angewendet werden, um die Verfasser solcher Schriften zu belohnen, welche durch Entdeckung und zweckmässige Bearbeitung unbekannter oder unbenutzter historischer Quellen, Denkmäler und Urkundensammlungen sich um die deutsche Geschichte verdient gemacht haben. Solchen Schriften darf aber nur die Hälfte des Preises zuerkannt werden.

Es steht Jedem frei, für diesen zweiten Fall Werke der bezeichneten Art auch handschriftlich einzusenden. Mit denselben sind aber ebenfalls alle gleichartigen Werke, welche vor dem Einsendungstage des laufenden Zeitraums gedruckt erschienen sind, für diesen Preis gleich berechtigt. Wird ein handschriftliches Werk gekrönt, so erhält dasselbe einen Preis von 500 Thalern in Gold; gedruckt erschienenen Schriften können nach dem Grade ihrer Bedeutung Preise von 250 Thlr. oder 500 Thlr. Gold zuerkannt werden.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich von selbst, dass der dritte Preis auch Mehreren zugleich zu Theil werden kann.

8. Rechte der Erben der gekrönten Schriftsteller. Sämmtliche Preise fallen, wenn die Verfasser der Preisschriften bereits gestorben sein sollten, deren Erben zu. Der dritte Preis kann auch gedruckten Schriften zuerkannt wer-

den, deren Verfasser schon gestorben sind, und fällt alsdann den Erben derselben zu.

4. **Form der Preisschriften und ihrer Einsendung.** Bei den handschriftlichen Werken, welche sich um die beiden ersten Preise bewerben, müssen alle äussern Zeichen vermieden werden, an welchen die Verfasser erkannt werden können. Wird ein Verfasser durch eigene Schuld erkannt, so ist seine Schrift zur Preisbewerbung nicht mehr zulässig. Daher wird ein Jeder, der nicht gewiss sein kann, dass seine Handschrift den Preisrichtern unbekannt ist, wohl thun, sein Werk von fremder Hand abschreiben zu lassen. Jede Schrift ist mit einem Sinnspruche zu versehen, und es ist derselben ein versiegelter Zettel beizulegen, auf dessen Aussenseite derselbe Sinnspruch sich findet, während inwendig Name, Stand und Wohnort des Verfassers angegeben sind.

Die handschriftlichen Werke, welche sich um den dritten Preis bewerben, können mit dem Namen des Verfassers versehen, oder ohne denselben eingesandt werden.

Alle diese Schriften müssen im Laufe des neunten Jahres vor dem 14. März, mit welchem das zehnte beginnt (also diesmal bis zum 14. März 1875), dem Director zugesendet sein, welcher auf Verlangen an die Vermittler der Uebersendung Empfangsbescheinigungen auszustellen hat.

5. **Ueber Zulässigkeit zur Preissbewerbung.** Die Mitglieder der Königlichen Societät, welche nicht zum Preisgerichte gehören, dürfen sich, wie jeder Andere, um alle Preise bewerben. Dagegen leisten die Mitglieder des Preisgerichts auf jede Preisbewerbung Verzicht.

6. Verkündigung der Preise. An dem 14. März, mit welchem der neue Verwaltungszeitraum beginnt, werden in einer Sitzung der Societät die Berichte über die Preisarbeiten vorgetragen, die Zettel, welche zu den gekrönten Schriften gehören, eröffnet, und die Namen der Sieger verkündet, die übrigen Zettel aber verbrannt. Jene Berichte werden in den Nachrichten über die Königliche Societät, dem Beiblatte der Göttingenschen gelehrten Anzeigen, abgedruckt. Die Verfasser der gekrönten Schriften oder deren Erben werden noch besonders durch den Director von den ihnen zugefallenen Preisen benachrichtigt, und können dieselben bei dem letztern gegen Quittung sogleich in Empfang nehmen.

7. Zurückforderung der nicht gekrönten Preisschriften. Die Verfasser der nicht gekrönten Schriften können dieselben unter Angabe ihres Sinnspruches und Einsendung des etwa erhaltenen Empfangsscheines innerhalb eines halben Jahres zurückfordern oder zurückfordern lassen. Sofern sich innerhalb dieses halben Jahres kein Anstand ergiebt, werden dieselben am 14. October von dem Director den zur Empfangnahme bezeichneten Personen portofrei zugesendet. Nach Ablauf dieser Frist ist das Recht zur Zurückforderung erloschen.

8. Druck der Preisschriften. Die handschriftlichen Werke, welche den Preis erhalten haben, gehen in das Eigenthum der Stiftung für diejenige Zeit über, in welcher dasselbe den Verfassern und deren Erben gesetzlich zustehen würde. Der Verwaltungsrath wird dieselben einem Verleger gegen einen Ehrensold überlassen, oder wenn sich ein solcher nicht findet, auf Kosten der Stiftung drucken lassen, und in

diesem letztern Falle den Vertrieb einer zuverlässigen und thätigen Buchhandlung übertragen. Die Aufsicht über Verlag und Verkauf führt der Director.

Der Ertrag der ersten Auflage, welche ausschliesslich der Freiexemplare höchstens 1000 Exemplare stark sein darf, fällt dem verfügbaren Capitale zu, da der Verfasser den erhaltenen Preis als sein Honorar zu betrachten hat. Wenn indessen jener Ertrag ungewöhnlich gross ist, d. h. wenn derselbe die Druckkosten um das Doppelte übersteigt, so wird die Königliche Societät auf den Vortrag des Verwaltungsrathes erwägen, ob dem Verfasser nicht eine ausserordentliche Vergeltung zuzubilligen sei.

Findet die Königliche Societät fernere Auflagen erforderlich, so wird sie den Verfasser, oder falls derselbe nicht mehr leben sollte, einen anderen dazu geeigneten Gelehrten zur Bearbeitung derselben veranlassen. Der reine Ertrag der neuen Auflagen soll sodann zu ausserordentlichen Bewilligungen für den Verfasser, oder falls derselbe verstorben ist, für dessen Erben, und den neuen Bearbeiter nach einem von der Königlichen Societät festzustellenden Verhältnisse bestimmt werden.

9. Bemerkung auf dem Titel derselben. Jede von der Stiftung gekrönte und herausgegebene Schrift wird auf dem Titel die Bemerkung haben:

von der Königlichen Societät der Wissenschaften in Göttingen mit einem Wedekindschen Preise gekrönt und herausgegeben.

10. Freiexemplare. Von den Preisschriften, welche die Stiftung herausgiebt, erhalten die Verfasser je 10 Freiexemplare.

Göttingen, den 14. März 1870.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

April 6. №. 8. 1870.

Universität.

Bericht über die Benekeschen Preisaufgaben.

Der am 30. Juli 1864 verstorbene Consistorialrath und Prediger Carl Gustav Beneke hat in seinem am 16. Juli 1864 errichteten Testamente die Stadt Berlin zum Erben eingesezt unter der Bedingung, dass dieselbe das Grab des Erblassers und seines Bruders erhalte, die im Testamente bestimmten Legate auszahle, den Ueberschuss aber für eine Stiftung zur Förderung des Studiums der Philosophie verwende.

Nach den im Testamente enthaltenen Anordnungen geht der Hauptzweck der Stiftung dahin, dass, so wie es zur Zeit des Bruders des Erblassers, des Professors an der Universität Berlin Friedrich Eduard Beneke, mehrmals geschehen ist, jährlich philosophische Preisaufgaben unter dem Namen Beneke'scher Preisaufgaben, mittelst öffentlicher Blätter zu stellen sind. Zunächst soll die philosophische Facultät der Universität Berlin ersucht werden, das Stellen der Preisaufgaben, die Beurtheilung der eingehenden Bearbeitungen und die Zuerkennung

der Preise zu übernehmen; für den Fall aber, dass sie diese Mühwaltung abzulehnen sich veranlasst sehen sollte, ist die philosophische Facultät in Halle, wo der Bruder des Erblassers ein Jahr studirt hat, und wenn auch diese sich weigern würde, die philosophische Facultät zu Göttingen, wo der Bruder mehrere Jahre als Privatdocent thätig gewesen ist, um die Uebernahme zu ersuchen. In Beziehung auf die Beschaffenheit der Preisaufgaben ist die Bedingung gestellt, dass sie nicht in das Gebiet der speculativen Philosophie fallen dürfen. Der erste Preis soll keine geringere Summe als 500 Thaler in Friedrichsd'or, so lange es dergleichen giebt, das sogenannte Accessit nicht weniger als 200 Thaler in Friedrichsd'or betragen.

Dem hochlöblichen Magistrat in Berlin ward durch Cabinetsordre vom 12. April 1865 die allerhöchste Genehmigung zur Annahme der Beneke'schen Erbschaft ertheilt.

Der Magistrat der Stadt Berlin richtete in einem Schreiben vom 11. November 1865 die Frage an die philosophische Facultät der Universität Göttingen, ob sie das Stellen der Aufgaben, die Beurtheilung der eingehenden Arbeiten und die Zuerkennung der Preise zu übernehmen bereit sei?

In den durch diese Anfrage hervorgerufenen Berathungen der Facultät gab zunächst der in dem Testament geforderte Ausschluss der speculativen Philosophie zu umfassenden Erwägungen Veranlassung. Da der Erblasser seines verstorbenen Bruders gedenkt und auf ein in Gemeinschaft mit diesem veranstaltetes Unternehmen hinweist, dem er Fortgang und Bestand sichern will, so musste die Vermuthung sich aufdrängen, dass mit dem Ausdruck speculative Philosophie

eine ganz bestimmte Richtung philosophischer Bestrebungen in Aussicht genommen sei, nämlich solche, die darauf ausgehen, aus metaphysischen Vorüberzeugungen, welche unabhängig von aller Erfahrung als durch reines Denken für sich feststehende gelten, die Thatsachen der Erfahrungswelt abzuleiten und zu erklären. Doch gestattete der immerhin eine verschiedene Deutung zulassende Ausdruck der Facultät nicht, nach Massgabe dieser Vermuthung die beschränkende Bestimmung aufzufassen und ihren Sinn festzustellen; sie musste vielmehr auf den Wortlaut der testamentarischen Verfügung zurückgehen, aus dem mit Sicherheit zu entnehmen ist, dass nach Ansicht des Begründers der Stiftung ein Gebiet der Philosophie vorhanden sein muss, welches unter den Begriff der von ihm so genannten speculativen Philosophie nicht fällt. Und da konnte es keinem Zweifel unterliegen, dass diesem Gebiete diejenigen philosophischen Disciplinen zuzuweisen sind, welche eine empirische Durchforschung des sachlichen Materials und experimentelle Begründung zulassen, also nicht nur Geschichte der Philosophie, sondern auch Psychologie, Pädagogik, Aesthetik, Philosophie der Natur und Geschichte u. dgl. Ja, die Facultät hielt sich nach dem Wortlaute des Testaments für berechtigt in den Bereich der Preisaufgaben auch solche Untersuchungskreise zu ziehen, welche, wie z. B. vergleichende Sprachwissenschaft, Nationalökonomie, Culturgeschichte, Kunstgeschichte, Politik, Mechanik und Naturwissenschaft, in neuerer Zeit immer mehr zu philosophischen Wissenschaften erwachsen sind und durch eine Discussion ihrer Principienfragen, wie sie durch die Stiftung des Erblassers angeregt und befördert wird, sich zu

solchen Wissenschaften weiter zu bilden im Stande sein würden. Auch glaubte sie, dass durch die beschränkende Bestimmung die reine Mathematik nicht getroffen werde, aus Gründen, welche hier anzugeben zu weit führen würde.

Sobald die Facultät der Ueberzeugung Raum geben konnte, dass ein sehr weites Gebiet für Preisaufgaben vorhanden sei, welche der Forderung des Begründers der Stiftung entsprechen und zugleich eine erwünschte Anregung zu wichtigen und tüchtigen wissenschaftlichen Untersuchungen darzubieten geeignet sind, hielt sie es für Pflicht, die in der Anfrage des Magistrats der Stadt Berlin enthaltene Aufforderung nicht zurückzuweisen und an ihrem Theile die Verwirklichung der wohlwollenden Absichten des verstorbenen Consistorialraths und Predigers Beneke sich angelegen sein zu lassen. Sie wandte sich daher in einem Schreiben dd. 22. December 1865 an das Hohe Curatorium der Universität Göttingen mit der Bitte um Ermächtigung mit dem Magistrate der Stadt Berlin Verhandlungen anzuknüpfen, und sprach zugleich dem Magistrate der Stadt Berlin gegenüber ihre Bereitwilligkeit aus, unter gewissen demnächst weiter zu begründenden Bedingungen die ihr zugedachte Wirksamkeit bei der Beneke'schen Stiftung auszuüben. In Folge der vom Hohen Curatorium am 15. Januar 1866 ertheilten Ermächtigung ging die Facultät in Verhandlungen mit dem Magistrate in Berlin ein, in welchen sie ihre Auffassung der die speculative Philosophie ausschliessenden Bestimmung geltend machte und noch besonders hervorhob, dass sie sich für befugt halte, nicht nur die von ihr zu stellenden Preisaufgaben aus der Geschichte der Philosophie, der Psychologie und Pädagogik zu entnehmen,

sondern auch aus dem ganzen Umkreise derjenigen Wissenschaften, welche herkömmlich von einer philosophischen Facultät vertreten zu werden pflegen, dies jedoch mit der zwiefachen Beschränkung, dass die Facultät einmal nur solche Fragen stellen dürfe, welche durch ihre Allgemeinheit und ihre principielle Wichtigkeit als philosophische Grundfragen der einzelnen Wissenschaften anzuerkennen sind und deren Lösung für die Methode und den gesammten weiteren Ausbau dieser Wissenschaften von Bedeutung ist, sodann dass die Facultät von einer speculativen Behandlung der von ihr zur Bearbeitung gestellten Materien auch da, wo sie eine solche an sich billigen könnte, absehen und sich in der Formulirung ihrer Aufgaben auf diejenigen Vortheile beschränken müsse, welche die empirische Durchforschung des Materials und eine vorsichtige inductorische Gewinnung allgemeiner Resultate aus demselben zu erreichen vermögen. Da der Magistrat der Stadt Berlin sich nicht veranlasst sah, gegen diese Auffassung der Bestimmung des Testamentes Bedenken oder Einspruch zu erheben, gelang es bald die Verhandlungen zu einem befriedigenden Abschlusse zu bringen. Ihre Ergebnisse waren:

1) das am 28. Juni 1866 vom Magistrate der Königlichen Haupt- und Residenzstadt Berlin vollzogene, am 23. März 1867 von dem Ober-Präsidenten der Provinz Brandenburg bestätigte Statut, und

2) das am 22. Mai 1867 von dem Decan der philosophischen Facultät in Göttingen, Hofrath von Leutsch, und dem Magistrate der Haupt- und Residenzstadt Berlin vollzogene, von der Königl. Regierung in Potsdam am 5. December

1867 genehmigte Regulativ für die Beneke'sche Stiftung.

Aus dem Regulativ theilen wir hier folgende Bestimmungen mit:

Die philosophische Facultät in Göttingen verpflichtet sich, alljährlich zwischen dem 1. April und 1. Juli eine philosophische Preisaufgabe zu stellen und als „Beneke'sche philosophische Preisaufgabe" zu veröffentlichen. — In Bezug auf die Stellung der Aufgabe ist die philosophische Facultät in Göttingen nur in sofern beschränkt, als solche Aufgaben einer derjenigen Disciplinen entnommen sein müssen, welche herkömmlich philosophische genannt werden und nicht in das Gebiet der speculativen Philosophie fallen. — Für jede Aufgabe werden zwei Preise ausgesetzt, ein erster Preis von 500 Thaler Gold und ein zweiter von 200 Thaler Gold. — Zur Einlieferung der bezüglichen Arbeiten wird Frist gegeben bis zum Schluss des Monats August im zweitfolgenden Jahre. — Jede bei der Concurrenz zu berücksichtigende Arbeit muss auf dem Titelblatte mit einem Motto versehen sein und eben daselbst eine Bezeichnung der Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, dass sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist. Ferner muss einer jeden solchen Arbeit ein verschlossener Zettel beigegeben sein, welcher auf der Aussenseite mit dem Motto der Abhandlung bezeichnet ist und innerhalb Namen, Stand und Wohnort des Verfassers angiebt. In anderer Weise darf der Name des Verfassers nicht angegeben sein, auch dürfen verschlossene Zettel nur bei den Arbeiten geöffnet werden, denen ein Preis zuerkannt worden ist. — Die Einlieferung der Arbeiten erfolgt an die Adresse der philosophischen Facultät auf Kosten der resp.

Verfasser. — Die Beurtheilung der eingelieferten Arbeiten steht ausschliesslich der philosophischen Facultät in Göttingen zu. — Die Zuerkennung der Preise erfolgt an dem der Einlieferung der bezüglichen Arbeiten zunächst folgenden 11. März, dem Geburtstage des Stifters, oder wenn dieser Tag auf einen Sonntag oder Festtag fällt, am nächstfolgenden Wochentage in einer öffentlichen Sitzung der philosophischen Facultät in Göttingen. — Die nicht für preiswürdig erkannten Arbeiten werden sammt dem dazu gehörigen verschlossenen Zettel durch die philosophische Facultät in Göttingen an die aufgegebene Adresse auf Kosten der Verfasser zurückgesandt. — Die Auszahlung der Preise erfolgt gegen eine Bescheinigung des Decans der philosophischen Facultät, dass dem N. N. durch die Facultät ein Preis von . . . zuerkannt sei, und gegen die darunter zu setzende Quittung des Empfangsberechtigten aus der Stadt-Hauptkasse in Berlin auf Anweisung des Magistrats dieser Stadt direct an den Empfänger, welchem die bezügliche Bescheinigung bei seiner Benachrichtigung über den ihm zuerkannten Preis unter Rückgabe seiner Arbeit zugestellt werden wird.

Die erste den 2. April 1869 gestellte Preisaufgabe lautet:

Die Facultät wünscht eine kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Sie bezeichnet die Zeit Galilei's als den geeigneten Anfangspunkt der Darstellung und erwartet nur einleitungsweise die Leistungen der antiken Mathematik und Mechanik, nicht die Theorieen der speculativen Philosophie des Alterthums, in der zum Verständniss nöthigen Ausdehnung erörtert zu sehen.

Die geschichtliche Seite der Arbeit würde zu zeigen haben, wann, von wem und auf Veranlassung welcher bestimmten Aufgabe jedes einzelne der wesentlichen Principien der Mechanik zuerst aufgefunden und ausgesprochen, wann, durch wen und auf Veranlassung welcher andern bestimmten Bedürfnisse oder Untersuchungen der ursprüngliche Ausdruck der Theoreme verändert, berichtigt oder früher vereinzelte zu einem allgemeinen Prinzip zusammengezogen worden sind. Hierbei verlangt die Facultät zwar kein weitläufiges Eingehen auf die verschiedenen Anwendungen der Principien, legt jedoch Werth auf die Erwähnung der Originalbeispiele, an denen ihre jedesmalige Fassung zuerst erprobt worden ist.

Die kritische Seite der Arbeit, deren äusserliche Trennung von der historischen oder völlige Verschmelzung mit dieser dem Geschmack und Ermessen der Bearbeiter überlassen bleibt, würde zu zeigen haben, wie viel an jedem dieser mechanischen Principien nur ein selbstverständlicher logischer Grundsatz, wie viel die zum Gebrauche nothwendige mathematische Formulirung eines solchen Grundsatzes, wie viel dagegen Ausdruck einer allgemein gültig befundenen Erfahrungsthatsache, wieviel endlich nur eine durch den bisherigen Umfang der Erfahrungskenntniss wahrscheinlich gemachte Annahme ist.

Die Facultät erwartet, dass im geschichtlichen und im kritischen Theile nicht ausschliesslich die Arbeiten der Mathematiker und Physiker, sondern auch der nützliche und schädliche Einfluss der innerhalb des zu schildernden Zeitraumes aufgetretenen philosophischen Theorieen berücksichtigt werde. Um aber den Umfang der Aufgabe zu ermässigen, verzichtet die Fa-

cultät auf Berücksichtigung der eigentlich physischen Theorieen und Hypothesen über die Constitution der wirklichen Körper und die Natur der wirklichen Ereignisse, so wie auf die Erörterung der chemischen Processe, des organischen und physischen Lebens; sie überlässt dem Bearbeiter anhangsweis die Richtungen anzugeben, nach denen bisher die allgemeinen mechanischen Principien Eingang in diese Gebiete gefunden haben. Sie wünscht dagegen die Darstellung so weit fortgeführt, dass sie die neuen Vorstellungsweisen noch einschliesst, welche über den Begriff von Naturkräften, über ihre Wirkungsweisen und den Uebergang ihrer Wirkungsformen in einander sich hauptsächlich an die Untersuchungen über das mechanische Aequivalent der Wärme geknüpft haben.

Für das Jahr 1870 ist folgende Preisaufgabe gestellt:

Speculative Constructionen haben über die Constitution der Materie kein haltbares Ergebniss geliefert. Es bedarf der Induction aus den Resultaten manigfacher exacter Untersuchungen, um die für die verschiedensten philosophischen Interessen hochwichtigen Fragen zu beantworten, ob die bekannten chemischen Elemente als ursprünglich verschiedene Stoffe oder als irgendwie gebildete Derivationen einer identischen Grundmaterie aufzufassen und wie in beiden Fällen die Formeln, welche ihre charakterischen Eigenschaften ausdrücken würden, als Glieder einer Reihe anzuordnen sind. Die wichtigste Vorarbeit hierzu ist die exacte Bestimmung der Atomengewichte dieser Elemente.

Obwohl durch die klassischen Untersuchungen von J. S. Stas die Atomengewichte des Chlors, Broms, Jods, des Kaliums, Natriums, Lithiums,

des Bleis, Silbers, des Schwefels und Stickstoffs mit ausserordentlich grosser Schärfe und möglichster Vermeidung constanter Fehler neu ermittelt und die wahrscheinlichen Fehler der Endresultate berechnet sind, so umfassen diese Arbeiten doch nur etwa den sechsten Theil der bis jezt bekannten Elemente, während die Atomengewichte der übrigen Elemente bald eine grössere bald eine geringere Zuverlässigkeit besitzen.

Die philosophische Honorenfacultät der Georgia Augusta der grossen Schwierigkeiten sich bewusst, welche mit diesen Untersuchungen verbunden sind, macht mit voller Würdigung der eben genannten Arbeiten zum Gegenstand der Preisaufgabe der Benekeschen Stiftung für das Jahr 1870 eine neue durchaus exacte Bestimmung der Atomengewichte der Erdmetalle, zugleich mit der Feststellung der Fehlergrenzen der gewonnenen Resultate; sie verlangt ferner eine kritische Bearbeitung des in dieser Beziehung vorhandenen wissenschaftlichen Materials. Die Facultät würde daneben die Frage gern erörtert sehen, ob die Hypothesen von Prout und Dumas zu verwerfen sind, oder ob die noch vorhandenen Unterschiede zwischen jenen Hypothesen und den Beobachtungen durch genügende chemische oder physikalische Gründe sich erklären lassen.

Ueber das vordere Epithel der Cornea.

Von

W. Krause.

Die unterste Lage cylindrischer Epithelialzellen auf der Vorderfläche der Säugethier-Cornea enthält in sparsamer Vertheilung vorhandene

Zellen, welche sich von den bekannten durch die Beschaffenheit ihrer Kerne unterscheiden. Die letzteren werden nämlich von auffallend granulirten ovalen Körperchen ersetzt, bei denen es schwer nachzuweisen ist, dass sie in Zellen eingeschlossen liegen. Macht man einen Querschnitt durch das Epithel der überlebenden Cornea (Rind, Kalb, Schaf, Schwein, Kaninchen), der aus einer Zellenlage besteht, so zeigen sich die Körperchen in fast constantem geringen Abstande von der Membrana elastica anterior. Ganz frisch untersucht erscheinen sie blasser; mit Hülfe von Reagentien als ellipsoidische, Gebilde, die in einer hellen Grundsubstanz zahlreiche längliche Körnchen enthalten. Der längste stets senkrecht auf die Cornea-Oberfläche gerichtete Durchmesser der ovalen Körperchen beträgt 0,01 — 0,02 Mm; die Dicke 0,006 — 0,009. Mitunter sehen sie wie gestielt aus und die sie zusammensetzenden Körnchen vermögen wegen ihrer länglichen Form das Bild einer Weintraube — freilich in sehr verjüngtem Massstabe wieder zu geben.

Weder mit den Wanderzellen des Cornea-Epithels, noch mit den Kernen benachbarter Epithelialzellen ist eine Verwechslung möglich. Die letzteren besitzen eine doppelte Membran, insofern die eigentliche Kernmembran, welche durch Alkalien erblasst, von einem in den letzteren hervortretenden Verdichtungssaum des angrenzenden Zellenkörpers umgeben wird. Die Reproduction des Cornea-Epithels erfolgt nicht in den unteren, sondern wesentlich in den mittleren Schichten durch Kerntheilung, was sich am besten auf successiven Flächenschnitten ergibt.

Man muss also eine untere perennirende und eine obere, sich fortwährend erneuernde, aus

platten Zellen bestehende Hälfte des Epithels unterscheiden.

Hiernach ist eine Betheiligung der granulirten Körperchen an der Neubildung von Epithelialzellen nicht anzunehmen, wie ihre Herkunft und Bedeutung überhaupt vorläufig dahingestellt bleiben muss. — Genauere Mittheilungen sind im Druck befindlich.

Göttingen, den 15. März 1870.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

April 27. № 9. 1870.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

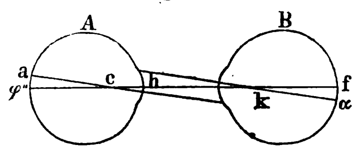
Ueber die Grösse des ophthalmoscopischen Bildes.

Von C. Schweigger,
Prof. Dr. med.

Mitgetheilt von A. Clebsch.

Einer Erörterung über die Grösse des ophthalmoscopischen Bildes legen wir das von Donders reducirte Listing'sche schematische Auge zu Grunde. Der gesammte dioptrische Apparat wird hier repräsentirt durch eine Krümmungsfläche welche vorn von athmosphaerischer Luft, hinten von humor aqueus begränzt wird und deren Krümmungsradius 5 Mm. beiträgt. Der Punkt c (Fig. 1) welcher 5 Mm. hinter dem Scheitel (h) der Krümmungsfläche liegt, ist also der optische Mittelpunkt. Der Brechungsexponent ist $= \frac{4}{3}$. Lichtstrahlen welche parallel auf die vordere Krümmungsfläche auffallen, finden im zweiten Medium ihre Vereinigung in φ'', 20 Mm. hinter h; die Länge der Sehaxe beträgt also 20 Mm., die Entfernung $c\varphi''$ folglich 15 Mm.

Fig. 1.



Stellen wir (Fig. 1) bei der ophthalmoscopischen Untersuchung zwei solcher Augen, welche also beide emmetropisch sind, einander gegenüber so ist zunächst klar, dass sämmtliche Lichtstrahlen, welche in *A* von dem der Axe benachbarten Puncte *a* des Augenhintergrundes ausgehen nach ihrem Austritt aus dem Auge ein paralleles Strahlenbündel bilden werden, dessen Richtung bestimmt wird durch den Axenstrahl *a c*. Von denjenigen dieser Strahlen welche das Auge *B* erreichen wird einer gerade auf den optischen Mittelpunct dieses Auges *k* gerichtet sein folglich ungebrochen durchgehen und den Axenstrahl darstellen, auf welchem sich sämmtliche von *a* ausgegangene Strahlen schneiden; *α* wird folglich das optische Bild von *a* sein. Da unserer Voraussetzung nach die Linien *a c* und *α k* parallel sind, so sind auch die Winkel $ac\varphi''$ und αkf einander gleich.

Als unmittelbare Consequenz ergiebt sich hieraus, dass unter den zu Grunde gelegten Voraussetzungen Bild und Object genau die gleiche Grösse haben; oder auf den speciellen Fall angewendet, welchem diese Betrachtung gewidmet ist: der Sehnerv des Auges *A* entwirft in *B* ein Netzhautbild, welches genau so gross ist als es selbst. Die Entfernung der beiden Augen von einander ist in Bezug auf die Grösse des Bildes ganz gleichgültig, das Gesichtsfeld dagegen wird selbstver-

ständlich um so kleiner je weiter *A* und *B* von einander entfernt sind.

Unter welchem Sehwinkel erscheint nun dem Auge *B* der Sehnerv des Auges *A*? Offenbar ist der Winkel *fkα* derselbe welchen wir sonst Sehwinkel oder Distinctionswinkel nennen; seine Grösse berechnet sich auf einfache Weise, ist $kf = c\varphi'' = 15$ Mm. und rechnen wir den Durchmesser des Sehnervenquerschnitts der Einfachheit halber $= 1{,}5$ Mm. so ist die Grösse des Sehwinkels in Bogenlänge ausgedrückt $= \frac{1{,}5}{15}$ oder in Winkelgraden $\frac{1{,}5}{15.\ 3{,}14} \cdot 180^0$ $= 5^0{,}73$.

Wie gestalten sich nun die Verhältnisse wenn das Auge *A* nicht emmetropisch ist?

Ist *A* myopisch in Folge von Verlängerung der Sehaxe und liegt sein Fernpunct z. B. 139,5 Mm von *k* (also etwa *M* $\frac{1}{5}$) so finden wir die Länge der Sehaxe wenn wir die zum Fernpunkt conjugirte Brennweite im Auge *B* berechnen, dessen Krümmungsfläche dabei natürlich unverändert bleibt.

Die Formel für diese Berechnung*) ist:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{\varphi''} - \frac{1}{na}$$

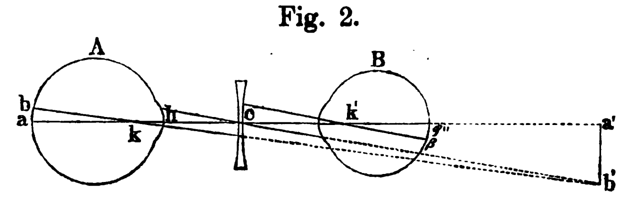
wo *F* die gesuchte conjugirte Brennweite, φ'' die Hauptbrennweite ($= 20$ Mm.) *n* den Brechungsindex ($= \frac{4}{3}$) *a* die Entfernung des Objectes von der vorderen Krümmungsfläche (*h*) bedeutet; *a* ist also $= 134{,}5$ Mm. Es ergiebt sich aus dieser Berechnung eine Verlängerung der Sehaxe um 2,5 Mm.

In Fig. 2 hat also das Auge *A* eine Sehaxe

*) vergl. Wüllner, Einleitung in die Dioptrik des Auges pg. 12.

von 22,5 Mm. und das Object *ab* würde, wenn nicht das emmetropische Auge des Beobachters (*B*), dazwischen träte, in 139,5 Mm. von *k* sein vergrössertes umgekehrtes Bild *a'b'* entwerfen.

Fig. 2.



Sämmtliche nach *a'* convergirende Strahlen werden nach ihrem Durchgang durch das Concavglas *c* parallel, wenn der negative Brennpunct von *c* mit *a'* zusammenfällt. Es wird ferner einer der nach *b'* convergirenden Strahlen durch den Mittelpunct des Concavglases *c* gehen und die Richtung angeben für das parallele Strahlenbündel in welches sämmtliche nach *b'* convergirende Strahlen verwandelt werden.

Wir brauchen also nur eine Parallele zu der Linie *cb'* durch (*k'*) den optischen Mittelpunct des Auges *B* zu ziehen um den Axenstrahl zu finden auf welchem das Bild von *b'*(*β*) zu Stande kommt.

Der Winkel *φ'' k' β* ist folglich der Sehwinkel unter welchem das Object *ab* ophthalmoscopisch gesehen wird und wir wollen denselben künftig mit *d* bezeichnen. Schon aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass der Werth des Winkels *d* abhängt von der Entfernung des Concavglases *c* vom Auge *A*. Je mehr sich das Concavglas dem Bilde *a'b'* annähert um so kürzer muss seine Brennweite sein, um so grösser wird der Winkel *b' c a'*, welcher als Parallel-Winkel *d* gleich ist um so stärker also die Vergrösse-

rung, um so kleiner aber auch das Gesichtsfeld. Die Sache verhält sich in der That genau so wie bei der Brücke'schen Lupe oder dem Holländischen Fernrohr. Man braucht nur in Fig. 2 an Stelle des Auges *A* ein Convexglas zu setzen; beim Holländischen Fernrohr fällt die Hauptbrennweite, bei der Brücke'schen Lupe die zur Objectdistance conjugirte Brennweite mit *a'* zusammen, alles Uebrige bleibt unverändert. Der Werth des Winkels *d* ergiebt sich aus folgender Rechnung. Zunächst ist wie bemerkt $d = \angle a'cb'$ folglich in Bogenlänge ausgedrückt

$$d = \frac{a'b'}{a'c}$$

Der Werth von $a'b'$ berechnet sich aus der Gleichung: $a'b' : ab = a'k : ak$. Nun ist
$ak = ha - hk$ folglich $= 22{,}5 - 5 = 17{,}5$ Mm. $a'k = 139{,}5$ Mm. nehmen wir also wie oben $ab = 1{,}5$ Mm. so erhalten wir

$$a'b' = \frac{1{,}5 \,.\, 139{,}5}{17{,}5}$$

folglich $d = \frac{1{,}5 \,.\, 139{,}5}{a'c \,.\, 17{,}5}$.

oder in Winkelgraden ausgedrückt

$$d = \frac{1{,}5 \,.\, 139{,}5}{a'c \,.\, 17{,}5 \,.\, 3{,}14} \,.\, 180^0$$

Die Grösse des Sehwinkels unter welchem der Sehnerv des Auges *A* erscheint ist also abhängig von der Entfernung des corrigirenden Concavglases vom untersuchten Auge, immer vorausgesetzt dass die negative Brennweite des Glases mit dem Fernpunct des Auges zusammenfällt.

Halten wir ein Concavglas von 124,5 Mm. negativer Brennweite vor den Spiegel in dieselbe Entfernung in welcher sich ein Brillenglas ge-

in welcher a die Entfernung des leuchtenden Punctes von h, F die dazu conjugirte Brennweite (ha = 18 Mm) φ'' die Brennweite für parallele Strahlen (also $h\varphi''$ = 20 Mm.) n den Brechungsindex = $\frac{4}{3}$ bedeutet. Da wir also sämmtliche Werthe bis auf a kennen, so verwandelt sich die Formel in

$$\frac{1}{a} = \frac{n}{\varphi''} - \frac{n}{F}.$$

Aus der Berechnung ergiebt sich a = 135,4 hinter h also = 130,4 hinter k; wir haben also fast genau $H\frac{1}{5}$.

Die Verhältnisse gestalten sich ganz analog wie bei Myopie, nur umgekehrt. Das von den brechenden Medien entworfene Bild des Sehnerven ist virtuell und liegt 130,4 Mm. hinter k, um die von diesem virtuellen Bilde ausgehenden Strahlen parallel zu machen brauchen wir Convexgläser deren Brennweite um so kürzer sein muss, je näher wir sie ans untersuchte Auge bringen und daher wird auch der Sehwinkel um so kleiner je weiter entfernt vom untersuchten Auge wir das corrigirende Convexglas anbringen. Halten wir dasselbe vor den Spiegel 15 Mm. vom optischen Mittelpunct des untersuchten Auges entfernt, so erhalten wir für den Sehnerv dessen Durchmesser wir wie oben = 1,5 Mm annehmen einen Sehwinkel von $5^0,73$; bringen wir dagegen das corrigirende Convexglas hinter den Spiegel (50 Mm. vom optischen Mittelpunct des untersuchten Auges entfernt) so sinkt der Sehwinkel bis auf $4^0,76$.

Accommodirt sich dagegen ein schematisches Auge von 18 Mm. Sehaxen Länge auf parallele Strahlen, so setzt diess eine Verkürzung des

wöhnlich befindet, nämlich 15 Mm. von *k*, so wird der Werth des Winkels $d = 5^0,4$. Bringen wir dagegen das Concavglas hinter den Spiegel, so dass seine Entfernung von *k*, dem optischen Mittelpunct des untersuchten Auges *A* 50 Mm. beträgt so muss die Brennweite desselben 89,5 Mm. betragen und der Winkel *d* wird dann $= 7^0,4$.

Wird das schematische Auge mit Beibehaltung einer Sehaxe von 20 Mm durch Veränderung seiner Krümmungsfläche auf eine Entfernung von 139,5 Mm accommodirt so nimmt es nach Donders *) einen Krümmungsradius von 4,5 Mm an, *ak* wird folglich = 15,5 Mm.

Setzen wir diesen Werth in die eben angeführte Rechnung ein, so würde bei der ophthalmoscopischen Untersuchung mit einem Concavglas von 124,5 Mm. Brennweite in 15 Mm. Entfernung von *k* der Sehnerv unter einem Winkel von $5^0,7$ erscheinen; benutzen wir dagegen ein Concavglas von 89,5 Mm. Brennweite in 50 Mm. von *k* so wird der Sehwinkel $= 8^0,59$.

Auf analoge Weise berechnet sich der Sehwinkel unter welchem der Opticus bei Hypermetropie erscheint. Nehmen wir an die Sehaxe unseres schematischen Auges sei um 2 Mm. verkürzt; die Entfernung *ak* beträgt also 13 Mm, so haben wir zunächst zu berechnen nach welchem hinter *k* gelegenen Punct Lichtstrahlen convergiren müssen um in *a* ihre Vereinigung zu finden. Wir benutzen zu dieser Rechnung dieselbe Formel nach welcher wir oben die Verlängerung der Sehaxe bei Myopie berechnet haben nämlich:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{\varphi''} - \frac{1}{na}$$

*) Donders Accommodation and Refraction of the eye p. 179.

Krümmungsradius auf 4,5 Mm. voraus *). Untersuchen wir es nun in diesem Zustande ophthalmoscopisch (also bei einer durch Accommodationsanspannung neutralisirten Hypermetropie von $\frac{1}{5}$) so brauchen wir natürlich überhaupt kein corrigirendes Glas, da die vom Augenhintergrunde reflectirten Strahlen bereits parallel aus den brechenden Medien austreten; der Sehnerv erscheint dann unter einem Sehwinkel von $6^0,3$.

Stellen wir die erhaltenen Resultate noch einmal übersichtlich zusammen, so erscheint ein Sehnerv von 1,5 Mm. Durchmesser

a) bei Emmetropie unter einem Sehwinkel d von $5^0,7$.

b) bei Myopie mit einem Fernpunct von 139,5 Mm. also etwa $M \frac{1}{5}$
   1) mit concav 124,5 Mm. in 15 Mm. von k $d = 5^0,4$
   2) mit concav 89,5 in 50 Mm. von k $d = 7^0,4$.

b') bei demselben Grade von scheinbarer Myopie
   1) mit concav 124,5 Mm. in 15 Mm. von k $d = 5^0,7$
   2) mit concav 89,5 Mm. in 50 Mm. von k $d = 8^0,59$.

c) bei Hypermetropie mit negativem Fernpunct in 130,4 Mm. (also fast genau $H \frac{1}{5}$)
   1) mit convex 145,4 Mm. in 15 Mm. von k $d = 5^0,7$
   2) mit convex 186,4 Mm. in 50 Mm. von k $d = 4^0,76$

c') bei demselben Grad von Hypermetropie welche aber durch Accommodationsanspannung latent ist $d = 6^0,3$.

*) Donders l. c. p. 179.

Diese Resultate stimmen überein mit denen zu welchen auch Mauthner *) bei Berechnung der „Vergrösserung" (nicht des Sehwinkels) gelangt ist. Doch möchte ich in Bezug auf die Schlussfolgerungen welche andere hieraus abzuleiten versucht haben etwas vorsichtiger vorgehen. Es wäre gewiss interressant wenn wir aus der Grösse des ophthalmoscopischen Bildes einen Schluss darauf ziehen dürften, ob wir es mit wirklicher Emmetropie oder nur mit scheinbarer d. h. mit latenter Hypermetropie, und ebenso ob wir es mit wirklicher Myopie zu thun haben, oder mit scheinbarer d. h. mit Accommodationsanspannung (eventuell Plesiopie nach E. v. Jaeger).

Zuerst ist hier die Frage zu beantworten ob der Sehnerv als eine constante Grösse betrachtet werden darf oder nicht, denn zunächst hängt doch die Grösse des ophthalmoscopischen Bildes von der Grösse des Sehnerven ab. Gewiss kommen aber hier individuelle Verschiedenheiten vor. Nach Henle **) z. B. hat der Sehnerv imNiveau des Choroidea 1,2 bis 1,6 Mm Durchmesser. Setzen wir diese Werthe statt des anfänglich gewählten von 1,5 Mm in Rechnung, so würde im schematischen emmetropischen Auge das Bild des Sehnerven unter einem Sehwinkel von $4^0,5$ bis 6^0 erscheinen. Die Differenz beträgt also $1^0,5$ d. h. sie ist ungefähr so gross wie der Unterschied im Sehwinkel bei manifester $H\frac{1}{8}$ (mit convex $\frac{1}{7}$ in 2″ vom Auge untersucht) und denselben Grad von H durch Accommodationsanspannung gedeckt. Schon für diesen Fall also würden wir zweifelhaft bleiben ob wir es mit einem anatomisch grossen

*) Lehrbuch der Ophthalmoscopie p. 186.
**) Anatomie II, p. 586.

oder kleinen Sehnerven oder mit einer aus optischen Gründen starken oder schwachen Vergrösserung zu thun hätten; noch viel mehr wird diess der Fall sein müssen bei geringeren Graden von Hypermetropie; der Fall dass eine Hypermetropie von $\frac{1}{3}$ vollständig latent bliebe, dürfte ohnehin selten genug vorkommen.

Bei Myopie ist ferner zu berücksichtigen dass die Vergrösserung in sehr starker Progression wächst mit der Entfernung des corrigirenden Concavglases vom Auge. Am sichersten würde es immer noch sein nach Coccius das corrigirende Concavglas dicht vor das untersuchte Auge zu halten, aber gerade dann fällt der Unterschied in der Vergrösserung bei scheinbarer und bei wirklicher, durch Sehaxen Verlängerung bedingter Myopie am unbedeutendsten aus. Noch wichtiger ist der Umstand, dass wir gar kein Mittel besitzen die Vergrösserung des aufrechten Bildes zu messen, sondern lediglich auf ungefähre Taxation angewiesen sind. Welchen Fehlerquellen man sich dabei aussetzt kann man sich durch einen einfachen Versuch leicht klar machen. Man bringe ein beliebiges Object am besten den kleinsten Druck der üblichen Schriftproben in die Brennweite eines mit einem nicht zu kleinen Diaphragma versehenen starken Convexglases. Beobachtet man das Object zunächst so, dass man sein Auge unmittelbar an die Linse anlegt, so hat man hierbei bei einer bestimmten Ausdehnung des Sehfeldes eine bestimmte Vergrösserung des Objectes. Wenn man sich aber mit seinem Auge von der Linse entfernt, so wird (während natürlich das Gesichtsfeld abnimmt) man sich kaum der Vorstellung erwehren können dass die Vergrösserung

in merklicher Weise zunehme. Offenbar handelt es sich hierbei um eine optische Täuschung.

Das Object welches auf der Retina des Beobachters abgebildet wird, ist ja doch das virtuelle Bild der in der Brennweite des Convexglases befindlichen Schriftproben; dieses Bild liegt aber bereits in unendlicher Entfernung hinter dem Convexglas und es wird demnach für die Grösse des Netzhautbildes gleichgültig sein ob man sich noch ein paar Zoll vom Convexglas entfernt. Will man einer complicirteren Ausdrucksweise den Vorzug gebend, den optischen Mittelpunct des Auges und den des Convexglases in einen gemeinschaftlichen Knotenpunct sich vereinigt denken, so ist es allerdings richtig, dass dieser gemeinschaftliche Knotenpunct von der Retina abrückt je mehr sich das Auge vom Convexglas entfernt; in demselben Maase aber nimmt auch die Entfernung zwischen diesem Knotenpunct und den hinter der Convexlinse liegenden Schriftproben zu, so dass eben doch die Grösse des Netzhautbildes unverändert bleibt. Dass letzteres wirklich der Fall sein muss, haben wir bei Fig. 1 bereits erwiesen.

Wir haben bisher nur von der Grösse des Netzhautbildes geredet, in der Regel freilich hat man einen andern Weg eingeschlagen und nicht die Grösse des Sehwinkels sondern „die Vergrösserung“ zu berechnen gesucht, unter zu Grundelegung einer sogenannten deutlichen Sehweite von acht Zoll. Nun ist es doch wirklich vom heutigen Standpunct der Ophthalmologie aus nicht zu verlangen einem so vollständig veralteten Begriff wie die deutliche Sehweite ist, noch länger Rechnung zu tragen; mit demselben Rechte wie nach 8 Zoll können wir die-

selbe nach 80 oder 800 Zoll verlegen oder auch gleich unendlich setzen.

Die Vergrösserung eines Fernrohrs messen wir so, dass wir das mit dem einen Auge gesehene vergrösserte Bild eines entfernten Massstabes zur Deckung bringen mit dem Bilde welches derselbe Maasstab in dem andern unbewaffneten Auge entwirft. Wir vergleichen also in der That die Grösse der Netzhautbilder oder was dasselbe ist, wir ermitteln um wie viel der Sehwinkel für die zu Grunde gelegte Maasseinheit durch das Fernrohr zunimmt. Es wird doch nun wohl Niemand behaupten wollen, dass der Mond mit einem 2 bis 3mal vergrössernden Theaterperspectiv betrachtet, 2 bis 3mal grösser erscheine als sich dieser Himmelskörper ausnehmen würde wenn wir ihn in der sogenannten deutlichen Sehweite von 8″ betrachten könnten. Nun — ob wir ein entferntes Object durch ein Holländisches Fernrohr oder ein nahes durch die Brücke'sche Lupe oder endlich den Hintergrund eines myopischen Auges im aufrechten Bilde und unter Zuhülfenahme von Concavgläsern betrachten, alles dies geschieht genau nach denselben optischen Gesetzen und wir können doch unmöglich ein und denselben Vorgang mit zweierlei Maasse messen.

Uebrigens ist auch ersichtlich, dass die Berechnung der ophthalmoscopischen Vergrösserung unter Zugrundelegen einer deutlichen Sehweite von 8″ ungenaue Resultate liefert. Mir wenigstens erscheint im aufrechten Bilde der Sehnerv ungefähr so gross, gewöhnlich aber etwas kleiner, als ihn E. v. Jaeger in seinem ophthalmoscopischen Handatlas abbildet; die meisten dieser Abbildungen sind wie der Verfasser genau — und wie man sich durch Messung über-

zeugen kann, auch ganz exact angiebt — bei siebenfacher Vergrösserung gezeichnet; wie stimmt das zu der 15 bis 24fachen Vergrösserung, welche man für das aufrechte Bild herausgerechnet hat: das natürlich ist unzweifelhaft richtig, dass ein virtuelles Bild welches in einem Sehwinkel von 5°,73 eingeschlossen ist auf eine Entfernung von 200 Mm. (etwa 8″) projicirt eine Ausdehnung von 20 Mm. haben würde, aber so gross erscheint mir wenigstens der Sehnerv niemals. Einen practischen Werth hat übrigens diese Frage gar nicht, da wir eben kein Mittel haben die Grösse des Bildes zu messen sondern lediglich auf eine vielen Fehlerquellen unterworfene Taxation angewiesen sind. Es verhält sich hierbei genau wie bei der Lupenvergrösserung; wollen wir uns nicht damit begnügen die Grösse des Sehwinkels zu berechnen sondern fragen wir nach der sogenannten „Vergrösserung" so können wir doch nur nach Analogie der bei Messung der Fernrohrvergrösserung auseinander gesetzten Methode verfahren. Nennen wir den Sehwinkel unter welchen wir das Object mit blossen Augen sehen *d*, und den Sehwinkel unter welchem es in derselben Entfernung aber mit Hülfe vergrössernder Instrumente erscheint *D*, so wird offenbar die Vergrösserung ausgedrückt durch das Verhältniss von $d : D$. Bei der Lupenvergrösserung hängt nun das Verhältniss von $d : D$ wesentlich davon ab, in welcher Entfernung sich das mit der Lupe betrachtete Object von unserm Auge befindet. Liegt das Object in der Brennweite der Lupe, so können wir nicht fragen nach der Grösse des Bildes, denn das Bild liegt dann eben in unendlicher Entfernung ist also auch unendlich gross; der Sehwinkel aber unter wel-

Grösse des virtuellen Bildes nach den bekannten optischen Formeln leicht zu berechnen. Um das Bild deutlich zu sehen muss das untersuchende Auge entweder myopisch sein, so dass sein Fernpunct mit der Entfernung des Bildes vom Auge zusammenfällt, oder eine der Lage des Bildes entsprechende Accommodationsanspannung machen. Der Sehwinkel aber, unter welchem das Object erscheint, ist nicht nothwendig kleiner als er sein würde wenn das Object in der Brennweite des Convexglases läge, er kann sogar grösser sein. Bewaffnen wir z. B. unser Auge mit einem Convexglase von 10″ Brennweite und bringen nun ein kleines Object in die Brennweite des Glases so erscheint es offenbar unter einem erheblich kleinerem Sehwinkel, als wenn wir das Object soweit annähern dass sein virtuelles Bild mit dem Nahepunct unserer Accommodation zusammenfällt.

Liegt das Object jenseits der Brennweite des Convexglases so tritt der Fall ein von welchem wir bei der Untersuchung im umgekehrten Bild Gebrauch machen. Die Grösse des umgekehrten reellen Bildes ist leicht zu berechnen, da vom optischen Mittelpunct des Convexglases aus, Object und Bild in denselben Winkel eingeschlossen sind; die Grössen sind also proportional den respectiven Abständen vom Convexglas. Nur wenig complicirter gestaltet sich die Rechnung wenn wir, wie bei der ophthalmoscopischen Untersuchung im umgekehrten Bild, letzteres nicht vom Auge direct sondern unter Zuhülfenahme eines Convexglases entwerfen lassen. Bei Benutzung eines Convexglases von 80 Mm (3″) Brennweite, welches wir soweit als seine Brennweite angiebt vom untersuchten Auge ent-

chem in diesem Fall das Object erscheint ist lediglich abhängig von der Brennweite der Lupe; bezeichnen wir die Grösse des Gegenstandes mit a, seine Entfernung von der Lupe mit c, so wird der Sehwinkel $D = \frac{a}{c}$ gleichviel wie gross die Entfernung der Lupe von unserm Auge ist. Der Sehwinkel des in derselben Entfernung mit blossem Auge betrachteten Objectes würde sein $d = \frac{a}{k}$, wenn a wieder die Grösse des Objectes, k seine Entfernung vom optischen Mittelpunct unseres Auges bedeutet. Der Quotient $\frac{D}{d}$ wird natürlich um so kleiner, jemehr sich die Lupe (nebst dem immer in der Brennweite bleibenden Object) dem Auge annähert, und er wird $= 1$, wenn k und c zusammenfallen, da vom Mittelpunct des Convexglases aus gesehen, Object und Bild stets unter demselben Sehwinkel erscheinen. Es würde also in diesem Fall lediglich die starke Annäherung des Objectes welche die Lupe erlaubt die Vergrösserung des Sehwinkels bewirken, und das mittelst der Lupe entworfene Netzhautbild würde nur so gross sein als es auch ohne die Lupe ausfallen würde wenn wir unser Auge auf so kurze Entfernungen accommodiren könnten; da aber k und c niemals wirklich zusammenfallen, so wird das mittelst der Lupe entworfene Netzhautbild immer noch etwas grösser ausfallen als es für die gleiche Entfernung des Objects durch die Accommodation erreicht werden könnte.

Liegt das Object nicht in der Hauptbrennweite sondern näher am Convexglas, so ist die

fernt halten berechnet sich die Grösse des Sehnerven zu seinem umgekehrten Bilde

1) bei Emmetropie = 1 : 5,3
2) bei $M\frac{1}{5}$ (genauer $M \frac{1}{139,5}$ Mm.) = 1 : 4,6.
3) Bei Accommodation des untersuchten emmetropischen Auges auf dieselbe Entfernung (oder scheinbare Myopie $\frac{1}{5}$) = 1 : 5,2
4) bei $H\frac{1}{5}$ (= $\frac{1}{130,4}$ Mm.) = 1 : 6,1
5) bei demselben Grad von H, wenn dieselbe durch Anspannung der Accommodation latent ist = 1 : 5,9.

Auf die Vergrösserung hat der Abstand des Glases vom Auge bei Emmetropie gar keinen Einfluss; bei Myopie nimmt die Vergrösserung zu mit der Entfernung des Glases vom Auge, bei Hypermetropie dagegen ab.

Universität.

Ueber das Vorkommen von Körnchenzellen in den Nervencentren.

Es war bekanntlich zuerst Türk, welcher auf das Vorkommen von Fettkörnchen und Körnchenzellen in den Rückenmarkssträngen die Aufmerksamkeit lenkte. Seine Untersuchungen waren nur auf Fälle gerichtet, in welchen bereits ältere Krankheitsheerde in Gehirn oder Rückenmark bestanden hatten und indem er einen bestimmten causalen Zusammenhang zwischen diesen Heerden und jenen Körnchenzel-

len statuirte, glaubte er die Rückenmarksstränge, in welchen sich diese Bildungen zeigten, als secundär erkrankt auffassen zu dürfen. Als Endergebniss dieser Forschungen dürfen wir den bis auf den heutigen Tag kaum bestrittenen Satz bezeichnen, dass die Rückenmarksstränge in dem Sinne ihrer centrifugalen oder centripetalen Leitung vom primären Heerde aus degeneriren. Vor einigen Jahren sind nun diese Bildungen von Westphal in Berlin in den Hinter- und Seitensträngen des Rückenmarks von Geisteskranken nachgewiesen, welche an der s. g. allgemeinen progressiven Paralyse der Irren gelitten hatten und kurze Zeit darauf von Simon in Hamburg in Fällen von Tuberculose und Typhus. Selbstredend konnte besonders bei Beobachtungen der letzteren Art von einem primären Heerde im Gehirn oder Rückenmark im Sinne eines Ausgangspunktes der Körnchenzellenbildung nicht die Rede sein; auch erwähnen jene Beobachter Nichts von einer, dem centripetalen oder centrifugalen Faserverlaufe entsprechenden Verbreitung der Degeneration.

Eigne Untersuchungen führten bald zu einem Ergebniss, welches sich mit dem von Türk aufgestellten Satze in keiner Weise vereinigen liess. Die Fettkörnchen und Körnchenzellen haften überhaupt nicht dem Faserverlaufe der Rückenmarksstränge, sondern deren Gefässen an, an oder vielmehr in deren Wandungen sie sich unter dem bekannten Bilde der fettigen Entartung derselben entwickeln. Das isolirte Vorkommen jener Bildungen zwischen den Nervenfibrillen ist Folge eines Artefacts, welches sich oft bei der vorsichtigsten Präparation nicht vermeiden lässt; der Zug des Messers, ein Verschieben des Deckgläschens u. dgl. m. genügt, die ihrer Ur-

sprungsstelle nur sehr schwach adhärirenden Körnchenzellen abzulösen und in die benachbarten Faserzüge zu übertragen. Nicht selten bewahren die isolirten Körnchenzellen Merkzeichen, an denen sich diese Ursprungsstelle noch erkennen lässt. Einzelne und ganze Gruppen zerreissen dann mit so scharfen Trennungslinien, dass sich der an der Gefässwand noch haftende Theil durch Anpassen des losgelösten genau ergänzen liesse. Ein andermal schliessen sich die Körnchenzellen wie Gypsabgüsse den Gefässen an; sie conserviren dann, auch nach ihrer Ablösung, die Rinne und stellen gebogene, schildförmige Figuren dar. Die fettige Entartung zeigte sich zuerst und am stärksten an den s. g. Uebergangsgefässen; die Capillaren waren stets weniger ergriffen und nur selten Arterien und Venen. Im Rückenmarke beschränkte sich die Gefässerkrankung in der Regel auf Hinter- und Seitenstränge, indess erstreckte sich dieselbe oft genug auch auf die Vorderstränge. Allein in gleicher Häufigkeit wie im Rückenmarke finden sich Fettkörnchen und Körnchenzellen in den Gehirngefässen.

Die fettige Entartung der Hirn- und Rückenmarksgefässe wird kaum in irgend einer mit bedeutenderen Ernährungsstörungen einhergehenden Erkrankung vermisst. Fettkörnchen und Körnchenzellen werden in der Regel um so zahlreicher gefunden, je rapider die Abmagerung und der Verfall der Kräfte vor dem Tode eintritt. Diese Bildungen, namentlich grosse Körnchenzellen, liessen sich besonders reichlich in Fällen von Tuberculose, Typhus, Eiterungen in den Lungen, Nieren, Krebs, namentlich des Magens, nachweisen. Der Einfluss destruirender Prozesse des Organismus auf die Entwicklung der Körnchenzellen im Gehirn und

Rückenmark macht sich in bestimmterer Weise dadurch kenntlich, dass diese, je nach den verschiedenen Gegenden der Erkrankung, vorzugsweise einzelne Abschnitte des Centralnervensystems ergriffen hatten. Bei Erkrankungen des Respirationsapparates fanden sich reichlichere Fettkörnchen und Körnchenzellen im Cervical- und Dorsaltheile des Rückenmarks, bei denen der Niere, Blase, Decubitus in der Sacralgegend etc. im Lumbartheile. Die genauere Darstellung der hier nur kurz berührten Verhältnisse wird in einer, bereits im Drucke befindlichen, ausführlichen Arbeit erfolgen.

L. Meyer.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

Mai 11. №. 10. 1870.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber die Kestnersche Sammlung von antiken Lampen.

Herr Hermann Kestner zu Hannover hat die Gefälligkeit gehabt, mir die von ihm mit kunstfertiger Hand ausgeführten Abbildungen von Lampen aus der Verlassenschaft seines Oheims, des früheren K. Hannov. Ministerresidenten A. Kestner zu Rom, nebst kurzen schriftlichen Notizen zur Ansicht und Prüfung mitzutheilen. Ich habe mich diesem Geschäfte um so lieber unterzogen, als es zweckmässig erscheint, dass den in neuerer Zeit ungebührlich vernachlässigten Lampen eine eindringlichere Aufmerksamkeit geschenkt werde, und aus der genaueren Kunde der in Rede stehenden Sammlung, obgleich dieselbe nur aus Römischen, nicht auch aus Griechischen Exemplaren 1) besteht, Belehrung nach mehr als *einer* Richtung hin geschöpft werden kann.

Diese Sammlung wurde von A. Kestner während einer Zeit zusammengebracht, in welcher vier an demselben Orte verweilende und durch ihre Lebensstellung noch mehr begünstigte Männer es auch auf dieselbe Art von Producten

des Kunsthandwerks abgesehen hatten: drei bedeutende Bildhauer, Thorwaldsen, Wagner, Fogelberg, und der grösste Sammler der neueren Zeit, G. Pietro Campana. Dennoch ist so weit uns ein Urtheil über die Erfolge dieser zusteht, A. Kestner auf dem betreffenden Gebiete seiner Sammlerthätigkeit hinter keinem dieser seiner Concurrenten zurückgeblieben; ja in Betreff der Zahl der ganzen Stücke und der ein besonderes Ganzes repräsentirenden Bruchstücke hat er alle überholt; unter denselben ist eins, welches bezüglich des Materials fast einzig dasteht; auch hinsichtlich des mannichfachen Interesses, welches die bildlichen Darstellungen erregen, darf man die Kestnersche Sammlung getrost den reichsten unter den eben erwähnten zur Seite stellen 2).

Die Zahl der von Herrn H. Kestner gezeichneten Lampen und Lampenbruchstücke beläuft sich auf 367. Unter jenen sind ein paar unächte; aber selbst diese haben ihren Werth, nämlich für die archäologische Kritik. Die überwiegend grosse Mehrzahl der Lampen ist, wie gewöhnlich, aus Thon; nur verhältnissmässig wenige sind aus Bronze; e i n e ist aus Blei.

Der Scholiast zu Aristoph. Nub. 1066 sagt in Beziehung auf den Hyperbolos: *οὐ χαλκῷ μόνον ἐχρῆτο πρὸς τὴν τῶν λύχνων κατασκευήν, ἀλλὰ καὶ μόλιβδον ἐνετίθει, ἵνα πολὺ βάρος ἔχοντες πλείονος ἄξιοι ὦσι.* Mit d e m Verfahren wird er im Alterthum schwerlich allein gestanden haben. Aber Lampen bloss aus Blei sind uns fast gar nicht überkommen. Passeri bemerkt in den Proleg. seiner Lucernae fict. p. XIII: plumbeam unam vidi Romae, sed paene aevo corruptam. Diese ist jedenfalls nicht die jetzige Kestnersche. Letztere hat sich vielmehr

verhältnissmässig gut erhalten. Es handelt sich um ein flüchtig gearbeitetes Stück, (welches inzwischen des schmückenden Bildwerks nicht entbehrt) von so geringen Dimensionen, dass Herr H. Kestner meint, „die Lampe werde wohl, wie andere Spielwerke dieser Art, in einem Kindergrabe sich gefunden haben“ 3).

Die Kestner'schen Lampen haben auch dadurch einen besonderen Belang, dass wir über ihre Herkunft im Allgemeinen gehörig unterrichtet sind und dass von dem Hauptbestandtheil, den thönernen, welchen dieser Aufsatz wesentlich gewidmet sein soll, eine nicht unbeträchtliche Zahl mit Inschriften, die sich auf die Verfertiger beziehen, versehen ist. Sie stammen sämmtlich aus Rom und der Umgegend. Derselbe Boden hat nun freilich die meisten Lampen geliefert, welche wir durch Beschreibungen und Abbildungen genauer kennen. Die 116 Lampen in Bartoli's und Bellori's Ant. lucern. sepolor. stammen nach des ersteren Versicherung mit Ausnahme von vier oder sechs (darunter zwei aus Perugia) sämmtlich aus Rom; aber durch Text und Abbildungen lernen wir weit mehr nur die Form der Lampen und hauptsächlich ihre bildlichen Darstellungen kennen, als wir von Inschriften sehen oder hören. Dasselbe gilt in noch höherem Grade von der beschränkteren Anzahl von Lampen, welche Bonanni im Mus. Kircherianum herausgegeben hat. Die beinahe tausend Lampen des Mus. Passerii bestanden nur zum Theil aus solchen, die in Pesaro selbst gefunden waren; die grösste Anzahl rührte aus Rom her, andere aus Perugia und anderen Orten Umbriens und aus Picenum. Nur ein Theil ist bekannt gemacht. Leider ist aber bei den einzelnen herausgegebenen Stücken die

Herkunft nur ausnahmsweise angegeben. Dagegen ist die Sammlung Seroux D'Agincourt's in Rom, meist wohl aus Funden in der Stadt und Umgegend, zusammengebracht, und wenn auch von dieser ebenfalls nur eine Auswahl (etwa ein halbes Hundert) durch Abbildungen bekannt gemacht ist, so haben wir doch nicht bloss über die Inschriften auf dieser, sondern auch über die der übrigen Kunde erhalten, vgl. Recueil de fragments de sculpt. ant. en terre cuite, Paris 1814, p. 63 fg., u. pl. XXIV—XXVIII. Auch die von den oben erwähnten gleichzeitig mit A. Kestner und nach ihm thätigen neueren Sammlern zusammengebrachten Lampen, welche uns genauer bekannt sind, enthalten Inschriften; allein wenn wir auch annehmen dürfen, dass die grösste Anzahl aus dem Römischen Boden stammt, so liegen doch in Betreff der einzelnen Stücke keine ausdrücklichen Zeugnisse vor. Endlich kommen noch die in den Römischen Katakomben gefundenen, in den diesen gewidmeten Werken besprochenen und abgebildeten Lampen in Betracht, unter welchen bekanntlich auch heidnische sind (Raoul Rochette Troisiéme Mém. sur les Antiq. chrét. des Catac., in den Mém. de l' inst. roy. de Fr. T. XIII, p. 758 fg.), aber Exemplare mit Namen der Manufactur oder des Verfertigers, wenn überall, so jedenfalls äusserst selten vorkommen 4).

Immerhin ist die Zahl der bis jetzt bekannt gewordenen Inschriften dieser Art auf Lampen, die sich mit Sicherheit oder auch nur mit Wahrscheinlichkeit auf Rom und Umgegend als Fundort zurückführen lassen, nicht übermässig gross und gar manche unter ihnen lassen bezüglich der Richtigkeit der Lesung Bedenken aufkommen.

Solche Inschriften kommen aber ganz besonders in Betracht, wenn es sich um die Geschichte der Industrie und des Handelsverkehrs in der Römischen Kaiserzeit handelt. Lampen mit denselben Namen finden sich an den entlegensten Orten des Römischen Culturkreises, ein Umstand, der noch beachtenswerther ist als der, dass sich dieselben bildlichen Darstellungen auf Lampen der verschiedensten Fundstätten wiederholen.

Die Frage, wo der Hauptsitz oder die Hauptsitze der Manufactur Römischer Thonlampen gewesen seien, ist noch jetzt als eine ungelös'te zu betrachten. Th. Mommsen äusserte im J. 1854 die Meinung, dass der grössere Theil der in den Galliae gefundenen Lampen aus Italien eingeführt sei 5), und auf seine Gewähr hin schrieb Marquardt noch neulich (Röm. Privatalterth. Abth. II, S. 238), dass „die Provinzen, während sie andere Thongeräthe in eigenen Fabriken nachbildeten, doch Lampen in grosser Masse aus Italien importirten (namentlich Gallien)". Mommsen wird jetzt schwerlich noch ganz ebenso urtheilen, wenn sich auch nachweisen lässt, dass fast alle unter dem Boden der in der Schweiz gefundenen Lampen stehenden Namen auch in Italien vorkommen 6). Ja wir können, so klar es auch ist, dass die in den Provinzen des Röm. Culturkreises gefundenen Lampen auf Italische zurückgehen, doch nicht einmal das zugeben, dass alle mit nichtbarbarischen Namen versehenen Lampen eingeführt sind. Lässt sich nicht annehmen, dass Italische Lampenfabrikanten in den Provinzen, wo die Nachfrage besonders stark war, Commanditen oder Filial-Manufacturen hatten? Können nicht Formen und Stempel an Töpfer in

den Provinzen kaufweise abgetreten sein? Würde nicht selbst die Annahme zulässig sein, dass, ebenso wie in unseren Tagen die Etiquetten berühmter Firmen nachgemacht werden, Töpfer in den Provinzen, namentlich an entlegenen oder minder zugänglichen Orten, nicht bloss die bildlichen Darstellungen, sondern auch die Namen sich aneigneten? Leider fehlt es uns noch jetzt sehr an einschlägigen Angaben genauer Sachverständiger. Doch wird das Folgende einstweilen genügen.

Nach G. Brunet Rev. archéol. X, 1853, p. 278 fg., sind die in den Gräbern der Bituriges gefundenen Lampen zum grössten Theile des imitations des lampes romaines. Fasst man diese Worte im strengsten Sinne, so muss man annehmen, dass Br. die den Römischen Lampen gleichen als im Lande der Bituriges verfertigt betrachtet. Von den beiden Inschriften, die er als auf Lampen vorkommend bezeichnet, enthält die eine sicher zu lesende den ausserdem vorkommenden Namen GDESSI, ohne dass sich nachweisen liesse, der Träger desselben habe dort seine Officin gehabt. Anders stellt sich nach Alph. de Boissieu und Comarmond die Sache für das in Beziehung auf seinen handwerklichen Betrieb ausgezeichnete Lugdunum. Jener macht es durchaus wahrscheinlich, dass ein gewisser „Sabinus Gatisius“ oder richtiger G. Atisius Sabinus zu Lyon eine Manufactur von Thonsachen, auch Lampen, hatte; Comarmond, dass dasselbe stattgefunden habe in Betreff eines gewissen „Strobilius“ oder vielmehr Strobilus (STROBILI) 7). Nach Comarmond enthält ferner das Lyoner Museum eine grosse Anzahl schöner Bruchstücke auch von Lampen mit Namensinschriften, welche theils in Lyon

theils und hauptsächlich in dem benachbarten Vienne und dem dieser Stadt gegenüberliegenden St. Colombe gefunden sind. Alle diese Bruchstücke sind aus dem Thon der betreffenden Gegend. Als Namen finden wir aber angegeben Acilis (für Lyon), Fortis (für Vienne und St. Colombe), Dessi und M ... LLI (ohne Zweifel Marcelli, für Vienne) 8). Die drei letzten Namen finden sich auch auf Lampen aus Lyon selbst 9). Alle kommen auch sonst vor; den Namen Fortis trifft man fast überall an 10). In besonders grosser Anzahl hat aber der Boden von Lyon Lampen mit dem fast ebenso verbreiteten Namen ATIMETI geliefert; ja dieser Name findet sich auch auf einem dort entdeckten Stempel 11). Auch der Name des Strobilus gehört zu denen, welche auf den Lampen am häufigsten und an den entlegensten Orten vorkommen 12). Ausser diesen Namen finden sich auf Lampen Lyon's noch andere ähnlich weit verbreitete oder doch auch in Italien vorkommende, ohne dass sich unseres Wissens eine auch nur dürftige Spur einer Thätigkeit des Namensträgers in L. oder der Nachbarschaft nachweisen lässt 13), während es andererseits an Namen nicht fehlt, welche entweder einzig dastehen oder in ähnlicher Weise wie der des G. Atisius Sabinus selten und bis jetzt nur diesseits des Po oder der Alpen, und zwar meist an Stätten nachgewiesen sind, die durch ihre Lage den Gedanken rege machen können, dass sie ihren Bedarf von Lugdunum bezogen 14). Für andere Orte Frankreichs, so wie für die Landstriche am Rhein in Deutschland und den Niederlanden, wo es in Römischer Zeit auch an Lampenfabriken nicht fehte, mangeln uns Berichte, aus denen sich ähnliche Belege mit

Sicherheit entnehmen liessen 15). Was Süddeutschland anbetrifft, so fand sich unter den Fabrikaten der Westerndörfer Töpferei nur eine Lampe ohne bildliche Darstellung mit dem Töpferstempel LVPATI (J. von Hefner „Die röm. Töpferei in W.“ = Oberbayer. Archiv für vaterländ. Gesch. Bd. XXII, S. 63 u. Taf. IV, Fig. 26 a b). Lampen mit diesem Stempel sind bis jetzt nur in geringer Zahl und an solchen Stätten nachgewiesen worden, die eine Beziehung von Westerndorf her mehr oder minder wahrscheinlich erscheinen lassen könnten. Doch findet sich der Name auch in Italien auf Lampen an Orten, wohin diese sicherlich ebensowenig von W. gekommen sind, wie das W.-sche Exemplar von dort 16). Ganz besonders wichtig ist aber, dass bei der Aufdeckung der Töpferwerkstätte in Westheim Lampenmodeln gefunden wurden, welche auf der Innenseite der unteren Theile die Namen FAOR, FORTIS und LITOGENE(S) zeigen, die sämmtlich auf Ital. Lampen gefunden werden 17). In Dalmatien ist von Belang Salona, für welchen Ort durch eine bei Spalato gefundene Inschrift ein collegium figulorum ausdrücklich bezeugt ist und F. Carrara „Die Ausgrabungen von S. im J. 1825, aus dem Ital. übers. herausg. von J. F. Neigebaur, Lpz. 1854, S. 23 unter der Rubrik Terracotta: „8 ewige Lampen mit verschiedenen Zeichen von salonitanischer Töpferarbeit“ bezeugt. Bei Gelegenheit der früheren Ausgrabungen sind zahlreiche Thonlampen gefunden, auch solche mit den Namen der Verfertiger, die wir durch F. Lanza und Kenner genauer kennen, unter welchen wir nur ein paar sonst nicht nachweisen können, während andere zu den gewöhnlichsten gehören und sich

an den entlegensten Orten finden 18). Die in London aufgefundenen Lampen stammen nach Ch. Roach Smith's Urtheil zum Theil aus einheimischer Manufactur zum Theil vom Continente. Zu den letzteren rechnet er auch die wenigen mit Namen versehenen, unter denen drei zu den am meisten verbreiteten gehören 19). Unter den betreffenden Inschriften der in Spanien selbst aufgefundenen Lampen, welche E. Hübner aufführt, giebt es mehrere, welche wir sonst überall nicht oder doch auf Lampen nicht angetroffen haben; aber auch einige sehr verbreitete, darunter eine, die an dem Orte gefunden ist, welcher durch seine Töpfereien nicht bloss in Spanien einer der berühmtesten war, in Sagunt, ohne dass man auch nur den mindesten Grund hätte anzunehmen, der Namensträger habe gerade hier seinen Wohnsitz gehabt 20). Aehnliches gilt von den Namen auf Lampen auch in Betreff der Insel Sardinien, soweit wir darüber nach den Schriften Giov. Spano's urtheilen können 21). Hinsichtlich der Stätten der Lampenfabrikation auf dem Festlande von Italien sind wir unseres Wissens nicht bedeutend über die verhältnissmässig geringe Kunde hinausgekommen, welche wir durch Passeri's Andeutungen erhalten 22). Dass jene dort sehr verbreitet gewesen, unterliegt keinem Zweifel, wenn wir auch schriftlich nur ein paar Fabrikstätten in Rom unmittelbar bezeugt finden 23). Italien scheint seinen Bedarf an Lampen im Wesentlichen selbst gedeckt zu haben 24). Bedeutender Import vom Osten her, aus Griechenland, hat ohne Zweifel nicht stattgefunden 25); wohl aber Export von fertiger Waare oder auch von Formen, nach den Provinzen, namentlich denen des Römischen Culturkrei-

ses 26). Aber welche Plätze hat man als das Centrum dieses Betriebszweiges zu betrachten? Etwa eine oder einige derjenigen, welche durch ihre Töpfereien vorzugsweise berühmt waren? Ohne Zweifel betheiligten sich diese, an ihrer Spitze Arretium, auch an der Arbeit von Lampen. Lässt sich das doch in Betreff mehrerer von ihnen selbst durch dort gemachte Funde nachweisen. Auf den Töpferstempeln Arretinischer Gefässe erscheinen nicht wenige Namen, die man auf den Stempeln der Lampen findet, darunter selbst der des Fortis 27). Es ist aber sehr die Frage, ob in solchen Orten für den Export in Masse, wie es bei den Gefässen der Fall war, gearbeitet wurde. Hauptsächlich handelte es sich auch bei den Lampen wohl nur um feinere Waare 28). Ausserdem mochten Modelle und Formen geliefert werden, selbst für andere Plätze in Italien. Man bedenke nun, dass die meisten Lampen untergeordneten Kunstwerthes sind. Täuscht uns nicht Alles, so hat man für solche (nebenbei auch für andere) vorzugsweise an Rom selbst, sowie seine Umgegend und die Landgüter der Grossen Rom's, auf denen sich passende Thonerde fand, zu denken, wenn auch Rom für sich einen sehr grossen Bedarf an Lampen hatte und, wie ausdrücklich bezeugt ist, andere Töpferwaaren, namentlich feinere, einführte. Schwerlich ist es ganz zufällig, dass die beiden uns sicher bekannten Römischen Lampenfabrikanten ihre Werkstätte an der Porta Trigemina, also in der Nähe des Emporiums, hatten, während der Umstand, dass grade diese Namen unter denen, welche auf ausserhalb Roms gefundenen Lampen vorkommen, bis jetzt nicht nachgewiesen sind, ebenso auf Zufall beruht wie der, dass

dieses auch für Lampen Römischen Fundorts noch nicht mit Sicherheit geschehen ist 29).

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen, welche wir weiterer Untersuchung anheimstellen, kehren wir zu den Kestner'schen Thonlampen zurück, indem wir zuvörderst mit Voraufsendung einer allgemeinen Uebersicht über die Beziehungen der bildlichen Darstellungen diejenigen hervorheben, welche uns in gegenständlicher Hinsicht besonders beachtenswerth erschienen sind 30); dann die Inschriften besprechen, für deren richtige Lesung und Deutung überall noch sehr viel zu thun ist.

I.

Herr H. Kestner hat den Lampenvorrath hauptsächlich nach den bildlichen Darstellungen geordnet und somit — in etwas anderer Weise wie ich es gethan haben würde — folgende Rubriken gemacht:

Götterkreise, 1) die zwölf Hauptgötter, 2) Jupiter, Minerva, Apollo und Ammon(?), 3) und 4) Jupiter, Juno, Minerva, 5) Isis, Anubis und Harpocrates, 6) letzter allein, 7) Cybele und Atys; einzelne Gottheiten, Jupiter, n. 8—30, Juno, 31. 32, Minerva, 33. 34, Mars (?), 35, Venus, Amor u. s. w., 36—57, Diana, 58—73, Apollo 74—88, Vesta (?), Kreis der Ceres, 90—92, Kreis des Neptun, 93—105, Mercurius und auf Agonen Bezügliches, 106—175, auf Pluto und die Unterwelt Bezügliches, 176—182, Aesculapius (?) u. s. w., 183—186, Bachus und sein Kreis, 187—223; Heroen (Hercules, Theseus, Amazonen, Medusa) 224—248; Victoria, 249—257; Fortuna; 258—261; Dichtung und Sage 262—265, (Diomedes mit dem Palladium, Ulysses und Polyphem, Aeneas, Anchi-

ses, Ascanius, Tarpeja von Schilden erdrückt (?)); Fabelwesen (Doppelsphinx, Harpyien), 266—269; häusliches Leben, Beschäftigungen u. d. gl., 270—281; Thiere, 282—318; verschiedene Formen ohne Darstellung, 319—348; noch genauer zu erörternde Darstellungen, 349—354; christliche Darstellungen, 358—367.

Von ganz besonderem Interesse ist gleich die Lampe n. 1 mit den Büsten der Zwölfgötter, einem Gegenstand, von dem mir auf Lampen nur noch ein Beispiel durch kurze Andeutung bekannt ist (s. Ch. Roach Smith Rom. London p. 111). Die Götter erscheinen auf der Kestnerschen Lampe in folgender Ordnung:

	Juno	Jupiter	Minerva		
Diana	Mercur			Mars	Apollo
Neptun	Venus			Vesta	Ceres
		Vulcan.			

Gerade unterhalb der Büste Jupiters befindet sich ein nach rechts (also nach Juno hin) blickender Adler mit ausgebreiteten Flügeln, deren Enden sich auch noch unter den Büsten der Juno und der Minerva hinziehen. Diana ist durch die Mondsichel als Luna, Apollo durch den Strahlenkranz als Sol charakterisirt. Von den männlichen Gottheiten sind nur Mercur und Apollo-Sol unbärtig und entbehrt nur Neptunus eines specifisch kennzeichnenden Attributs, was damit zusammenhängt, dass mit Ausnahme des Adlers Jupiters alle Attribute nur in Gegenständen bestehen, welche auf dem Kopfe getragen werden, dem Neptun aber kein solcher, der ihm als habituelles Attribut zu charakteristischer Unterscheidung gegeben werden könnte, eignet (trotz der unten zu erwähnenden Seemannsmütze). Bezüglich der Benennung

der drei weiblichen Gottheiten in der dritten Reihe könnte ein Schwanken statthaben. Die „Vesta“ ist allein mit einem Attribute versehen, nämlich mit einem Schleier auf dem Hinterhaupte. Es ist wohl unzweifelhaft, dass auf diesem Römischen Denkmale von den drei betreffenden Göttinnen nur der Vesta der Schleier als habituelles Attribut gegeben werden konnte. Schwieriger ist es nach der Darstellung an sich zu entscheiden, welche von den beiden übrigen weiblichen Büsten auf Venus und welche auf Ceres zu beziehen sei. Der einzige auf der Zeichnung sichtbare Unterschied besteht darin, dass die von uns als die der Venus bezeichnete Büste das Haar hinten in eine Art von Knauf zusammengebunden zeigt, während das Haar der anderen Büste ungebunden auf den Rücken hinabfällt. Den Ausschlag giebt zunächst der Umstand, dass der allein in der vierten Reihe befindliche Vulcan nach der „Venus“ emporblickt. Es stellt sich nun noch die Frage, ob in der Aufeinanderfolge und Stellung der einzelnen Gottheiten ein bestimmtes Princip zu erkennen sei oder nicht. Zunächst liegt es wohl auf der Hand, dass in der obersten Reihe die drei Capitolinischen Gottheiten als die höchsten und eng verbundene zur Anschauung gebracht sind, wenn auch die gewöhnliche Ordnung dieser drei Gottheiten die ist, dass Juno zur Linken, Minerva zur Rechten Jupiters ihren Platz hat. Dann ist in Betreff der zweiten Reihe klar, dass die beiden äussersten Büsten einander entsprechen. Dasselbe gilt bezüglich des Neptunus und der Ceres in der dritten Reihe; ich erinnere nur an die Ara Borghese (Denkm. d. a. K. I, 43). Weiter bilden in ähnlicher Weise wie Jupiter, Juno

und Minerva eine zusammengehörige Gruppe von dreien Vulcan, Venus und Vesta. Vulcan ist nur der äusseren Symmetrie wegen eine Reihe tiefer gesetzt, aber grade in die Mitte einer vierten Reihe und so, dass seine Zusammengehörigkeit mit den betreffenden Figuren der dritten Reihe durch das oben erwähnte Hinblicken nach der Venus hervorgehoben ist. Ja es wäre nicht unmöglich, dass bezüglich der inneren Figuren der zweiten und dritten Reihe eine Responsion im Kreuz beabsichtigt wäre, indem, wie sonstige Zusammenstellungen zeigen, Mercur und Vesta, Mars und Venus in Verbindung stehen. Das eben behandelte Monument ist schon von G. Seyffarth Berichtigungen der Röm., Griech., Pers., Aegypt., Hebr. Gesch. und Zeitrechnung, Mythologie und alten Religionsgesch. auf Grund neuer histor. und astronom. Hülfsmittel, Leipz. 1855, S. 210, besprochen, aber nur in chronologischer Beziehung, und, so viel ich davon verstehe, höchst unglücklich.

Eine interessante und eigenthümliche Darstellung ist ferner die auf dem Lampenbruchstücke n. 2. Auf dem halbmondförmigen Theile des Griffes sieht man in der Mitte die Büste Jupiters unter einem schwebenden Adler und in den Hörnerecken links die Büste Sol's und rechts die der Minerva. Auch hier scheint Sol als Apollo gemeint und die Zusammenstellung des schon seit Homer bekannten Dreivereins von Zeus, Athene und Apollon beabsichtigt zu sein. Der Kopf des Jup. Ammon, welcher unterhalb des Adlers, aber nicht mehr an dem halbmondförmigen Theile des Griffes zum Vorschein kommt, ist nicht bei jener Zusammenstellung in Anschlag zu bringen, sondern steht für sich allein und ist etwa als Amulet zu fassen.

Der Dreiverein von Isis, rechts von ihr Harpokrates und links Anubis auf einer anderen Lampe ist erst durch Ergänzung des letzten nach der in Antich. di Erc. T. VIII, t. II, 2 und Barré's Hercul. u. Pomp., Hamburg 1841, VI, 4! mitgetheilten Lampe hergestellt, aber unzweifelhaft. Dieselbe Darstellung findet sich auf der von F. Kenner a. a. O. S. 27, n. 1 beschriebenen Lampe und sonst.

Sehr merkwürdig ist das zu einer sehr grossen Lampe gehörige Bruchstück eines Griffes, der ebenfalls halbmondförmig ausläuft. Zwischen den Hörnern befindet sich eine bärtige Büste, deren Haupt mit einer spitz auslaufenden, an den Seiten mit herabhängenden Laschen versehenen Mütze bedeckt und deren Hals und Brust mit einem mantelförmigen Gewande vollständig verhüllt ist. Unterhalb der Büste ist ein nach links blickender Adler mit ausgebreiteten Flügeln in Relief ausgeführt. Vermuthlich handelt es sich um einen mit dem Jupiter identificirten Asiatischen Sonnengott. Figuren mit ähnlicher Kopfbedeckung treten uns in Darstellungen des Jup. Dolichenus entgegen.

Das sehr zerstörte Fragment n. 18 „von sehr entschiedenem grossen Styl" zeigt als einziges Bild einen Adler, welcher anstatt des Blitzes in der gewöhnlichen Form einen solchen, der ganz entschieden einer Fackel gleicht, in den Fängen hält. Ein Blitz in Fackelgestalt auch auf dem Relief in Etr. Mus. Chius. tav. CXC. Man erinnere sich daran, dass nach schol. ad Aesch. Prometh. 359 eine Blitzart πυρσὸς hiess; auch daran, dass dieses Wort vom Blitz gebraucht wird in dem Orakel bei Euseb praep. evang. p. 239 B. Anderes über Fackel-Blitz in der Griechischen Mythologie und Sprache

ist kürzlich beigebracht in der Schrift: Die Peleiaden zu Dodona, eine religionsgeschichtliche Untersuchung von Dr. Herm. Friedr. Perthes, Moers 1869, S. 36.

Nr. 38 enthält einen ganz nackten unbärtigen behelmten Mann, der etwas nach rechts gewandt auf einem Felsen oder Steinhaufen sitzt, indem er mit der Rechten den Lanzenschaft auf den Boden stützt und die Linke auf den an den Sitz angelehnten runden Schild legt, und sich nach links hin zu seinem Rosse umblickt, welches, indem es das rechte Bein hebt, den Kopf nach dem Manne hinwendet. Herr H. Kestner bemerkt über diese Lampe: „Styllose, sehr sorgfältig modern naturalistisch modellirte Zeichnung, doch schwach in Betreff der Correctheit. Kaum für antik zu halten; worauf auch die unplastische und rohe Form, so wie die ungewöhnliche Thonfarbe und unerfahrene Modellirung deutet. Der Fabrikstempel *ΛΙΛΤΟ* ist eigenthümlich, vermuthlich der genommene Abdruck eines ächten. Fast übereinstimmend mit dem Gemmenabdruck bei Stosch-Cades Vol. XXX, nr. 190, nur mit dem Unterschiede, dass die sitzende Figur weiblich ist (oder scheint?)“. Dass die modernen Fälscher von Lampen in Italien für die herzustellenden bildlichen Darstellungen geschnittene Steine oder Glaspasten benutzten, (ebenso wie dieses im Alterthume von den Lampenarbeitern geschah), wissen wir z. B. durch die Erfahrungen, welche man bei Gelegenheit der Entdeckung des an dem Duca di Sermoneta ausgeübten Betrugs machte, vgl. Bullett. d. Inst. arch. 1851, p. 90. In dem vorliegenden Falle könnte inzwischen eine antike Lampe als Muster vorgelegen

zu haben scheinen. Janssen beschreibt in Mus. L.-B. Inscr. p. 129, z. tab. XXIX, 2 und in den Mon. p. 105, n. 513 eine Lampe aus Livorno mit derselben Darstellung (vermuthlich ist die Beschreibung des Mannes dort als miles gravi armatura armatus richtiger als die hier gegebene: Mars, zittende op eene wapenrusting) und derselben Inschrift, nur dass der erste und dritte Buchstabe derselben durch den Querstrich als A bezeichnet sind. Obgleich indessen der verdienstvolle, leider nun auch dahin geschiedene Gelehrte auch nicht den mindesten Zweifel an der Lampe äussert, ja ihr ausdrücklich elegantia nachrühmt, können wir nicht umhin, grosse Bedenken an deren Echtheit zu hegen; ebenso wie gegen die Lampe haud minoris elegantiae derselben Herkunft, welche nach Janssen Inscr. a. a. O. exhibet genium alatum, qui puerum nudum procedere cogit, dum alius puer nudus antegreditur qui facem, ut videtur, sinistra tenens, eundem puerum protrahit, und mit derselben Namensinschrift versehen ist. Was die Inschrift anbetrifft, so zweifeln wir kaum,
R
dass ihr Original war: VIATO; vgl. z. B. Froehner Inscr. n. 2119.

Unter den Lampen mit Amordarstellungen (zu welchen auch eine Gruppe von Amor und Psyche gehört, in der bei dieser das zuletzt von Carl von Lützow Münchener Antiken S. 40 besprochene Weglassen der Flügel statthat, wie im Mus. Passer. II, 20 und bei Licetus p. 1147, wo auch Amor flügellos ist, wenn die Abbildung Glauben verdient) zeichnet sich durch Eigenthümlichkeit aus das Bruchstück nr. 43. In der Mitte der Darstellung eine Säule; rechts von derselben nach rechts hin fliegend ein Amor,

dessen linkes Bein über die Säule hin bis in den Raum links von derselben reicht und von der linken Vordertatze eines Löwen, der in dem Raume links von der Säule angebunden ist, gefasst wird. Der Löwe schickt sich an zu beissen, während der Amor das rechte Bein an den Körper anzieht und den oberen Theil dieses nach dem Thiere hinwendet; seine beiden Arme sind zum grössten Theile verloren gegangen. Man vergleiche hiemit n. 164 des Campana'schen Cataloges: un leone legato ad un palo, che attacca un Amorino. Gewiss hat der Kleine den Löwen geneckt. Man wird an die mit der Löwin oder dem Löwen spielenden Amoren erinnert, wie sie aus der von Plinius erwähnten Gruppe des Arkesilaos und einem Capitolinischen Mosaik bekannt sind, wo aber ihr Verfahren mit dem Thiere keine für sie so bedenkliche Wendung nimmt. Die Darstellung eines Amor, der einen durch seine Macht gebändigten Löwen liebkost, auf einer von C. M. Giroaud Antiq. Gaul. et Rom., pl. IV, n. 10, herausgegebenen Lampe.

Der ungeflügelte Knabe mit von der linken Achsel auf den Boden hinabfallendem Gewande, welcher mit der Linken einen auf der linken Schulter aufliegenden Palmzweig hält und den rechten Arm über den etwas gesenkten Kopf emporhebt, auf n. 44, ist ebenfalls keine gewöhnliche Darstellung.

Auf den Lampen n. 48 und 49 sehen wir Amor, der den am Boden liegenden Köcher mit der Rechten am Riemen fasst und mit dem linken Fusse darauf tritt, während er dort in der Linken einen kurzen Gegenstand, eine brennende Fackel, wie es scheint, hält, hier einen Gegenstand, der nach oben ähnlich aussieht,

aber einen langen, dünnen, etwas gebogenen Stiel hat, welcher nach links hin auf einen meist abgebrochenen Palmzweig stösst. Auf n. 49 fasst der besonders stark nach rechts hin geneigte Amor trotzdem auch diesen, und zwar dicht über seiner linken Achsel.

An dem Lampengriff unter n. 59 ist Diana lucifera dargestellt, in der Rechten und Linken je eine Fackel schräg emporhaltend. Ueber ihren Achseln ragt je ein Kinderkopf hervor (Hesperus und Lucifer). Vgl. Denkm. d. a. K. II, 190. Aber einer ganz gleichen Darstellung erinnere ich mich nicht.

Die Figur auf der Lampe unter n. 71 mit zwei die Köpfe nach auswärts richtenden Vögeln auf dem Haupte ist nach Herrn H. Kestner „beinahe vollständig erloschen bis auf einzelne weniger verwitterte Theile, die genau übereinstimmen mit einem bei Cav. G. Pietro Campana Illustraz. di due sepolcri Rom. del sec. di Augusto scov. tra la via latina e l'Appia presso la tomba degli Scipioni, Roma 1841, tav. VIII, lit. F abgebildeten Lampe, ohne dass im begleitenden Text eine Erklärung versucht ist". Dieses Monument hatte auch ich mir längst notirt als Pendant zu den in den Götting. gel. Anzeigen, 1855, S. 1826 fg. von mir behandelten Isisdarstellungen. Es möge erlaubt sein, den hier gesammelten Beispielen von Vögeln auf dem Kopfe von Gottheiten hinzuzufügen den Specht bei dem Bilde des Picus nach Ovid. Metam. XIV, 313 fg., die Taube bei der Venus, in mehreren Beispielen aus Phönizien, nach Gerhard's arch. Ztg. 1853, S. 404, den Adler bei Jupiter in Gerhard's ant. Bildw. Taf. CCCVIII, n. 28, den Adler bei Jup. und den Hahn bei Sol in Gori's Thes. Gemm. astrif.

Vol. III, p. 193, die Eule bei Minerva in Bartoli's Luc. fict. II, 10.

Bei dem schlafenden Endymion auf n. 72 gewahrt man rechts vom Kopfe des Schläfers den aufmerksam nach links hin emporblickend dastehenden Hund, der wohl auf die Annäherung der Diana hindeuten soll. Man vergleiche den der Haltung nach ganz entsprechenden Hund des Endymion auf dem Wandgemälde im Mus. Borbon. Vol. XIV, t. XIX.

Die drei Büsten des Sol n. 74—76 zeigen denselben mit sieben, fünf und zwölf Strahlen bekränzt. Einmal hat derselbe auf der Brust einen Gegenstand von der Form zweier kleiner concentrischer Kreise und ist er von zwei Delphinen umgeben. Jenes Rund erinnert an die an dem Chiton des Helios auf dem Wiener Vasenbilde in Gerhard's Arch. Ztg. 1848, Taf. XX, 1, wo nicht bloss das Strahlenhalsband und der Strahlengürtel, sondern auch das Hakenkreuz ein für den Sonnengott bedeutsamer Zierrath ist. Ueber den Delphin hat zuletzt gelehrt gesprochen Henri de Longpérier Tetradrachme inéd. de Delphes, Extr. de la Revue numism. Franc., Nouv. sér., T. XIX, 1869, p. 13 fg.

Auf n. 79 sitzt Apollo mit der Kithar im linken Arm dem Dreifuss mit dem Python gegenüber, hinter ihm Rabe und Greif, der sich nach links umblickt; zu seiner Seite am Boden liegt ein Lorbeerkranz. Die Stelle, wo das letzte, sonst so bekannte Attribut des Gottes angebracht ist, ist durchaus singulär.

Eine eigenthümliche, sonst, unseres Wissens, nicht vorkommende Darstellung ist die auf der Lampe n. 85, die inzwischen leider von ziemlich roher Arbeit und sehr undeutlichem Druck ist. Ein Flügelknabe, Amor, steht vor einer

thronenden Gewandfigur mit einem spitz zulaufenden Kopfaufsatz, welche einen Palmzweig in dem linken Arm hält und die rechte Hand an die Wange des Kleinen zu legen scheint, während dieser den rechten Arm wie redend oder etwas hinhaltend gegen die thronende Figur ausstreckt. Links von dieser am Boden ein aufrechtgestelltes „Saiteninstrument“ und darauf ein Vogel. Doch sind diese „zweifelhaft, sowie auch die sämmtlichen Hände und deren Thätigkeit sich nicht mit Gewissheit erkennen lassen“. Das „Saiteninstrument“ könnte recht wohl ein Altar, etwa mit einem Kranze an der Vorderseite sein. Bei der sitzenden Figur fällt mir zunächst Venus ein: über die Kopfbedeckung vgl. einstweilen meinen Text zu Denkm. d. a. K. II, 24,257. Der Vogel wäre dann für eine Taube zu halten.

Auf der Lampe n. 86 erblicken wir ein nach rechts hin schreitendes Flügelross; über demselben im Felde einen runden Schild oder eine grosse runde Schale, vor ihm eine Palme und in der Höhe der Brust des Rosses vor dem Baume ein zweihenkliges Gefäss. Herr H. Kestner vergleicht Mus. Kircher. t. 152, nr. 21, wo aber Gefäss und Palme fehlen, wie auch bei dem im Fluge dahineilenden Pegasus auf den Lampen bei Bartoli II, 16, Passeri I, 80, Kenner n. 136, und sonst.

Die Darstellung auf der Lampe n. 91 ist eine Wiederholung der bei Bartoli I, 37. Herr H. Kestner glaubt in einer beigefügten Abhandlung mit erläuternden Bildwerken, die sehr beachtenswerth ist, eine Scene, die sich auf ein antikes Fackelfest bezieht, zu erkennen.

Ein oberhalb nacktes Weib, das einen Bock von hinten an den Hörnern mit der Rechten

fasst, auf der Lampe n. 101 kann sowohl als Bacchantin als auch als Venus gefasst werden, welches Letztere ich vorziehen möchte.

Beachtenswerth ist ein bärtiger Triton, der die Rechte wie redend ausstreckt, auf n. 103 u. 104, wegen der einem πῖλος ähnlichen Mütze, die auf n. 104 oben ganz spitz ausläuft. Eine ähnliche Darstellung auf einer Lampe, welche nach dem Fabrikstempel SERG. PRIM. zu urtheilen, aus Rom stammt, beschreibt J. de Witte Descr. des Antiquités-Durand n. 1790 als die eines dieu marin, coiffé d'un bonnet pointu et muni d'une large queue de poisson. Ich halte die Kopfbedeckung für nichts Anderes, als für die Seemannsmütze, welche wir auch auf dem Kopfe Neptuns in Pompejanischen Wandgemälden finden (Denkm. d. a. K. II, 83 u. s. w.) und mit nichten als zur Bezeichnung irgend eines bestimmten Meergottes dienend betrachten dürfen. Hinterdrein sehe ich, dass Sam. Birch Anc. Pottery II, p. 282, der in Anm. 7 noch ein anderes Beispiel derselben Figur, wie ich kaum zweifle, von einer Lampe des Brit. Mus. anführt, jene deutet als Proteus wearing the mariners cap. Wer aber die Mütze richtig fasst, darf sie nicht etwa auf den Proteus „als Hirten der See Pitt. Erc. II, 39" (Müller Handb. d. Anh. 102, A. 2) beziehen.

Die Darstellung auf der Lampe n. 110, „roh in Form und Ausführung", zeigt einen „weniger maskenartigen als fratzenhaften Kopf", auf welchen zwei Hähne, von jeder Seite einer, mit dem Schnabel und dem einen gehobenen Fusse loszugeben im Begriff sind.

Auf der Lampe n. 130 finden wir in der Mitte innerhalb eines Kreises die Büste eines bärtigen, bekleideten Mannes, in dem concentri-

schen, kreisförmigen Raume umher sieben cippusförmige Rundaltäre, so vertheilt, dass einer oberhalb der Büste, je einer zu deren Seiten, und vier dicht neben einander unterhalb derselben stehen, und in den vier grösseren Räumen zwischen den Altären vier einzelne dahinsprengende Rosse, je zwei von den vier dicht zusammengestellten Altären aus nach derselben Richtung hin laufend. Gleiche Altäre, aber neun an Zahl, findet man auf beiden Seiten eines siegreichen auriga auf der mit dem Stempel des AELMAX versehenen thönernen Geldbüchse, welche zu Rom auf dem Aventin gefunden ist und jetzt zu Gotha auf dem Friedenstein aufbewahrt wird (D'Agincourt Rec. pl. XX, n. IX und p. 50 fg.) 31).

Noch beachtenswerther ist die Darstellung auf n. 138, „von rohester Arbeit und Zeichnung, doch trotz der Fratzenhaftigkeit voll Leben und Character". Ein mit zwei sprengenden Rossen bespannter zweiräderiger Wagen wird von einem vorn aufsitzenden, einen kurzen Stab oder eine Keule (vgl. Mus. Passer. III, 32) in der Rechten haltenden Manne, dessen Haupt eine gezackte Krone trägt, gelenkt. Hinter ihm erscheint ein Lanzenträger in einem weiten faltigen Gewande mit einer „Capuzze oder Pickelhaube", d. i. Asiat. Mütze, von welcher die Laschen nach hinten herabhängen.

Interessant ist ferner die Lampe n. 174, auf welcher man links ein auf den Hinterbeinen stehendes Pferd sieht, nach dessen Schnauze ein unbärtiger Mann den linken Arm hinhält. Dieser hat eine Art von Capuzze auf dem Kopf und trägt einen Schurz um den Leib. Herr H. Kestner vergleicht den Gemmenabdruck bei Stosch-Cades Vol. 53, n. 4.

Auf der „gut erhaltenen“ Lampe „mit deutlicher scharf modellirter Darstellung“ n. 176 sieht der Beschauer zumeist nach links einen Altar mit loderndem Feuer, weiter zur Rechten, unmittelbar vor dem Altar, einen Jüngling in der Chlamys, der den rechten Vorderarm mit ausgestrecktem Zeigefinger erhebt, indem er auf das Feuer blickt, und hinter ihm eine viel kleinere, verhüllte, anscheinend weibliche Gestalt, welche den Kopf senkt und mit der rechten Hand die Chlamys des Jünglings fasst.

Die folgende n. 177 zeigt Vesta, verschleiert, mit Füllhorn im rechten Arme, in der linken Hand eine Schale über einen Altar haltend, umgeben von zwei Laren mit Rhyton und Eimerchen, auf dem „Fragment eines Griffes von sehr flüchtiger Arbeit, doch nach S. Bartoli P. I, 13 u. 14 hinlänglich zu erkennen“. Die Anwesenheit der Vesta gehört zu den Ausnahmen bei dieser sonst nicht selten vorkommenden Lampendarstellung. Vgl. Bullett. arch. Nap., N. S., Ann. VII, t. 5.

Auf n. 182 sehen wir zwei Gerippe neben einander stehen, von denen das links den linken, das rechts den rechten Oberarm in gleichmässiger Gesticulation erhebt, während jenes den rechten, dieses den linken Arm gleichmässig an die Hüfte legt. Eine ähnliche Lampendarstellung bei A. Comarmond Palais-des Arts de la ville de Lyon pl. IV, wird p. 78, n. 444 mit Unrecht als espèce de danse macabre bezeichnet. Eine andere entsprechende beschreibt J. J. Dubois Descr. des Antiques de M. le comte de Pourtalès-Gorgier n. 864 also: deux squelettes debout et en regard paraissent avoir ensemble un entretien très-animé.

Das Fragment n. 183 „von ursprünglich sehr

auserlesener Arbeit in Zeichnung und Ausführung, jetzt so verwittert und zerstört, dass sich nur mit Mühe die Hauptdarstellungen erkennen lassen", stellt anscheinend den jugendlichen Bacchus vor die Augen, der, sitzend, mit einer sich um seinen Thyrsos ringelnden und an demselben zu dem Gotte emporzukriechen sich bestrebenden Schlange spielt, indem er diese am Hinaufkriechen dadurch verhindert, dass er beide Füsse auf das am Boden befindliche Ende des Thieres setzt.

Zu den auf Lampen, meines Wissens, nicht häufig vorkommenden Darstellungen gehört auch der sonst zur Genüge bekannte Stier mit Menschengesicht n. 189 u. 190. Bigot erwähnt a. a. O. einen unbärtigen Stierkopf von einer Lampe zu Athen.

Nr. 212 enthält die Büste eines Komikers in der Rolle eines Sclaven der neuen Komödie. Büsten dieser Art finden sich auf Lampen seltener als Masken; noch viel seltener ganze Figuren, wie, allem Anschein nach, auf der bei Spano Cat. p. 60, 47.

Unter den Lampen mit Darstellungen aus der Herculessage finden sich drei, welche den Kampf gegen den Hesperidendrachen in übereinstimmender Weise vor die Augen bringen n. 229—231 (Fragment). Das Thier hat sich um den linken Fuss des Hercules geschlungen, der es mit der Linken unterhalb des Kopfes fasst, während er mit der Rechten, welche die Keule hält, zum Schlage ausholt, ganz wie bei Passeri T. III, t. XCIII, wo indessen die Löwenhaut, die dem Hercules auf den Rücken herabfällt, nicht zu sehen ist, wie Herr H. Kestner bemerkt, der ausserdem als ähnlich bezeichnet die Darstellung „bei Barré Herc. u. Pomp.

Bd. VI, p. 41" = Antich. di Erc. VIII, t. V, wo Köcher und Bogen am Boden rechts von Herc. erscheinen. Eine Lampe mit demselben Gegenstande befindet sich nach Birch Anc. Pottery II, p. 284, A. 1, auch im Brit. Mus. Vermuthlich gehört auch die Lampe des Wiener Münz- und Ant.-Cab. n. 82 hieher. Das Motiv der Umschlingung des einen Beins von Seiten der Schlange findet sich auch bei dem Kampfe mit der Hydra, z. B. auf der Münze im Num. Chronicle N. S. V, 8, 9.

Zwei Lampenfragmente, n. 235 und 236 zeigen Telephos unter der Hindin, die ihren Kopf nach dem Kleinen umkehrt. Vgl. Cat. Campan. n. 175.

Merkwürdig ist das „Fragment von guter Arbeit aber schwachem Abdruck" n. 265, darstellend eine nackte von einem schlangenförmigen Gegenstand einmal (in der Mitte des Leibes) umwundene Figur, deren „Körperbildung" nach Herrn H. Kestner, „ungeachtet der stark modellirten Brust doch im Ganzen mehr männlich erscheint", von den Hüften an aus einem Haufen von oblongen Bündeln hervorragend. Einem anderen Beschauer des Originals kam die Figur entschieden weiblich vor. Sollte es etwa erlaubt sein an die Erdgöttin zu denken, welche als sortant d'une masse de rochers F. Lajard Rech. sur le culte de Venus p. 231 von einem Röm. Monumente erwähnt, und als deren Attribut die Schlange bekannt ist (Stephani Compte rendu p. l'A. 1860, p. 102)?

Unter den zur Rubrik häusliches Leben u. s. w. gehörenden ist ganz niedlich die Darstellung auf der Lampe n. 273 mit der Darstellung eines Alten mit Stab, der einem Hasen „Blätter" oder „Trauben" als Futter reicht.

Interessant auch die sich zweimal, n. 277 u. 278, wiederholende, das erste Mal sehr zierlich ausgeführte Darstellung zweier um eine Badewanne stehender nackter Weiber, von welchen das links vom Beschauer aus einer Amphora in die Wanne giesst, das zweite sich mit den Armen auf den Rand derselben stützt und aufmerksam in das Becken hineinschaut. Es giebt auf Lampen verschiedener Fundorte noch zwei ganz gleiche Darstellungen, deren eine durch Ant. di Ercol. VIII, t. XLVIII, n. 3 längst bekannt ist, während die andere in dem Mus. zu Constantine befindliche, in Nordafrika ausgegrabene erst in neuerer Zeit zu unserer Kenntniss kam, vgl. Rev. archéol. XVI, 1859, p. 560 fg., und pl. 372, n. 4. Aehnlich, nach der Beschreibung zu schliessen, Cat. Campana n. 269.

Nr. 280 ist ein drittes jetzt in Deutschland befindliches Exemplar der gefälschten Lampe, welche ich zuletzt in den Jahrbüchern von Alterthumsfreunden im Rheinlande H. XLI, S. 56, besprochen habe. Die hier geäusserte Vermuthung, dass die Stätte der Fälschung in Rom oder der Umgegend von Rom zu suchen sein werde, findet in dem Umstande, dass die dort zusammengebrachte Kestnersche Sammlung ein den übrigen gleiches falsches Exemplar enthält, ihre Bestätigung. Herr H. Kestner bemerkt: „ein ähnliches Exemplar besitzt Herr Dr. F. Hahn in Hannover, dessen Ornamente kaum an Aechtheit zweifeln lassen und in dieser Beziehung von meiner Lampe gänzlich abweichen“. Liesse sich die Aechtheit sicher nachweisen, so wäre das sehr merkwürdig. Als ich jenen Aufsatz schrieb, erinnerte ich mich nicht daran, dass sich eine ganz gleiche Lampe unter den unzweifelhaft unächten aus der Verlassenschaft

des Herzogs von Sermoneta befand, über welche es in dem Bullett. d. Inst. di corr. arch. 1851, S. 90 fg. heisst: La parte tecnica di essa lucerna era fatta talmente ad imitazione dell' antico, che la creta presentava il medesimo strato sottilissimo che in simili lavori veramente provenienti dalle classiche officine suol comunemente admirarsi.

Nr. 281 ist mit einer obsönen Darstellung versehen: eine Figur liegt oberhalb eines lectus auf dem Bauche; hinter dem auffallend grossen After erscheint der Obertheil einer anderen, bärtigen Figur, welche eine Geberde des Staunens zu machen scheint.

Nr. 282 zeigt eine Wiederholung der von O. Jahn Röm. Alterthümer von Vindonissa (Mittheil. d. antiquar. Gesellsch. in Zürich Bd. XIV, H. 4) Taf. IV, n. 9 herausgegebenen und S. 108 fg. erläuterten Lampendarstellung mit dem in einen cucullus gekleideten Fuchs, welcher den auf dem Baume befindlichen Raben mit der Leimruthe (harundo) zu fangen sich bestrebt. Eine dritte, dem Vernehmen nach aus Neapel stammende Lampe im Britischen Museum mit der Darstellung desselben Gegenstandes ist schon von Birch Hist. of anc. Pottery. Vol. II, p. 286 besprochen, und eine vierte in London gefunden bei Ch. Roach Smith Illustr. of Roman London pl. XXX, n. 9 abbildlich mitgetheilt. Von den drei mir in Abbildung vorliegenden Exemplaren ist das Kestner'sche das am besten ausgeführte. Betreffs des Dargestellten zeigt sich allerdings Abwechselung, aber nur in Kleinigkeiten, wie das auch sonst auf Lampen statt findet, z. B. auf der noch nicht erwähnten Kestner'schen n. 77 mit dem leyerhaltenden Apollo und der im Mus. Passeri I,

73. Die Andeutung des Erdbodens (etwa mit den aus ihm hervorragenden Baumwurzeln) zwischen dem Fuchs und dem Baume fehlt auf der Kestner'schen Lampe wie auf der bei R. Smith. Auf dieser hat der Rabe ganz dieselbe Haltung wie auf der von Vindonissa, auf der Kestner'schen erscheint der Rabe mit dem ganzen Körper von dem Fuchs abgewandt. Während dieser auf der Lampe von Vind. einen kürzeren Stab mit beiden Pfoten nach dem Vogel hinhält und neben ihm zwei oder drei ähnliche Stäbe wie am Boden stehend erscheinen, hält er auf der Kestner'schen Lampe einen mit der rechten Vorderpfote etwas unter der Mitte gefassten Stab zum Vogel empor und zwei in der Linken. Auf der Lampe bei Birch erblickt man nur e i n e n mit beiden Pfoten, aber anders wie auf der von Vind. gefassten Stab. Birch beschreibt den Fuchs a. a. O. als holding up a pair of pipes to the crow. Auch in Betreff der Haltung des Schwanzes von Seiten des Fuchses findet sich auf den drei Abbildungen Wechsel.

II.

Indem wir uns jetzt zu den Inschriften und den damit verbundenen Zeichen wenden, bemerken wir zuvörderst Folgendes.

Bekanntlich haben die bildlichen Darstellungen auf den Lampen in der Regel die Stellung, dass das Oben derselben gegen die Handhabe, das Unten aber gegen den Dochtansatz hin gerichtet ist. Von dieser Regel findet sich auf den Kestner'schen Lampen nur e i n e Ausnahme, nämlich in Betreff des Hahnenkampfs auf n. 109.

Die entsprechende Richtung haben auch die Inschriften, mit vier Ausnahmen, die sich auf drei Arten zurückführen lassen: 1) auf der eben

erwähnten Lampe hat auch die unten unter n. 30 angeführte Inschrift dieselbe Richtung, wie die bildliche Darstellung, 2) auf der unechten, oben S. 178 fg. behandelten Lampe hat das Bild die gewöhnliche, die Inschrift (n. 1) aber die verkehrte Richtung, und ebenso verhält es sich mit den tres Monetae und der unten unter n. 27 erwähnten Inschrift, 3) auf der Lampe n. 334, welche mit keiner bildlichen Darstellung versehen ist, erscheint die Inschrift FORTIS (unten n. 12) in der verkehrten Richtung. Die Inschriften sind durchweg eingedrückt oder gestempelt. Sie sind mit einer Ausnahme durchgängig vertieft: nur FORTIS ist erhaben, wie das bei diesem Namen auch sonst sich findet. Bei der vertieften Inschrift unter n. 29 ist der darüber stehende und bei der unter n. 31 der darunter stehende Buchstabe erhaben, während bei der vertieften Inschr. unter n. 30 der darüber stehende Buchstabe auch vertieft ist.

Wie auch sonst, finden wir Zeichen neben den Inschriften hergehen, die nicht Buchstaben sind: meist die bekannten. So steht eine Fusssohle unter der Inschr. n. 3, a, ein phallusartiges Zeichen unter der n. 20, ein Zeichen, das zunächst zusammenzustellen ist mit dem bei Passeri III, t. 103, n. 17 u. 21, unter der n. 6; öfter findet man die Zeichen in Hufeisenform und noch öfter die in Form von Ringelchen mit und ohne Punkte darin oberhalb und unterhalb, bzw. oberhalb oder unterhalb der Inschriften. Es scheint unzweifelhaft, dass alle diese Zeichen, welche sich bei den verschiedensten Namen finden, keine die Fabriken unterscheidenden Stempel sind, wie noch Kenner S. 22 meinte.

Mehrere von den Inschriften der Kestner'schen Lampen sind so beschädigt, dass man nur

noch die Spuren von Buchstaben sieht oder nur einzelne sich von einer Reihe erhalten haben. Ein geübter Inschriftenleser, der die Originale selbst vor Augen hat, wird gewiss noch manche entziffern können: wir wollen sie hier nicht berücksichtigen. Dann und wann war — wie das sich auch sonst findet — überall nur ein Anfangsbuchstabe oder ein Paar vorhanden. So kommt — wenn ich nicht irre — einmal ein blosses T (wie mehrere Male auf Wiener Lampen, vgl. Kenner im Reg. S. 124), ein anderes Mal AI vor; auf der oben beschriebenen Lampe n. 138 findet sich sicher mit vertieften Buchstaben C. L, ganz wie bei Müller Mus. Thorvalds. n. 149.

Die besser erhaltenen Inschriften von mehreren Buchstaben sind nach den Copien Herrn H. Kestner's folgende.

1) AIΛTO
2) BASSA oder SASSA (Hercules und der Hesperidendrache).
3, a) CATICIVES, (Sol).
3, b) CATILVESS, wenn der erste Buchstabe nicht ein G (zwei verbundene Hände, Caduceus).
4) CCLOSVO (Amor mit Vogel).
5) CIVLI?CPP. (Grabaltar von Cypressen umgeben).
6) CIVLNICEF (Gefäss).
7) CIVNBIT, darüber und darunter ein kleines Rund mit Punkt darin (Hercules die Hindin erjagend), und vielleicht noch einmal, ohne die Runde (Fisch).
8) CLOHEL (Triton mit Mütze auf dem Kopf).
9) COMNIS, vermuthlich, (Isis).
10, a) C·OPPIRE (Harpocrates).
10, b) C·OPPI·RES (Bacchantin mit Tympanum)

und noch einmal (ohne bildliche Darstellung).
10, c) COPPI·RES (ohne bildliche Darstellung).
10, d) COPPIRES (Gefäss mit Lorbeer darin).
10, e) COPREST (Leda mit Schwan).
11) CVICIRI (Apollo Citharödus).
12) FORTIS (ohne bildliche Darstellung).
13) GNVMICI (Panskopf).
14) IVLI·NI (ohne bildliche Darstellung).
15) LCAECSAE (Büste eines Wagenlenkers u. s. w.) und noch einmal (Mann der mit Keule gegen einen Löwen kämpft).
16, a) LCAESAB(?) (Löwe einen Stier anfallend, vgl. Mus. Passer. III, 13).
16, b) LCAESAE (Amor als Stierkämpfer).
17, a) LCASAB (Rosette), vermuthlich zweimal.
17, b) LCASAE (Löwe) und noch einmal (Serapis).
17, c) LCASAS (Alter, einen Hasen fütternd).
18) LFABRICAGAT (Löwe ein Crocodil anfallend).
19) LMAMIT (tres Monetae).
20) LMVNPHILE (drei komische Masken).
21) LORENT (Diana als Jägerin).
22) LPASISID (undeutliche Darstellung).
23) MAMA (Gladiatoren).
24) MARIO (Löwe, einen Steinbock anfallend).
25) MOP ?OSI (unzüchtige Darstellung n. 281).
26) MVNIREPI
27) O?ΛOꟼ HER (tres Monetae).
28) Q|WMICEL (Amor mit Palme).

(
29) PACcI

H
30) PACVC (Hahnenkampf).
31) VIBI (Amor und Psyche).

Ueber die Lesung, Deutung und das sonstige

Vorkommen der einzelnen Inschriften beschränken wir uns auf folgende Bemerkungen.

Zu n. 1 vgl. oben S. 178 fg.

Zu n. 2. SASSA bei Hrn. H. Kestner. Hr. Fromme, der die Gefälligkeit hatte, einige der K.'schen Copien nach den Originalen zu controliren, bejahte meine Anfrage, ob auch BASSA gelesen werden könne. Dieses findet sich unter der Lampe Mus. Passer. III, 32. SASA (mit einem S wie auch sonst öfters in Inschr.) ist als Töpfername aus Aretium bekannt (Fabroni Vasi fitt. Aret. p. 45).

Dass das zweite C in 3, a ein L und das S am Schlusse von 3, b ein T sein soll, unterliegt keinem Zweifel. Drei hierher gehörende Beispiele bei Froehner Inscr. terr. coct. n. 183—185, welcher „Die griech. Vasen und Terracotten z. Karlsruhe„ S. 107, n. 725 rücksichtlich des ersten verbessernd bemerkt, dass die Inschr. CATILVEST laute. Auf einer Lampe bei Beger Thes. Brandenb. Vol. III, p. 446, n. X und anderen, die Schuermans p. 54, n. 558 anführt, findet man C. ATIL. VEST, auf der in Mus. Passer. III, und der in Cat. Campan. n. 214 steht CATILIVES, also gerade das, was wir für 3, a voraussetzen. Birch hat Anc. Pott. II, p. 406 C. ATILVES. Auf denselben Namen geht sicherlich die Inschr. CATILITIS (so!) bei Kenner n. 66. Vermuthlich lautete er: C. ATILIus VESTinus. C. VESPINVS (wo sicher für P ein T gemeint war) auf der Lampe im Cat. Campana n. 305. Bei 3, b braucht in dem S am Schlusse nicht einmal ein Fehler vorausgesetzt zu werden, vgl. CASSTVS, CASSTI u. A.

Die Inschrift n. 4 findet sich ebenso bei Urlichs Verz. S. 37, A. 6; mit einem C anstatt des O am Schlusse öfters, und zwar ohne Punkte

zwischen den Buchstaben, wie auf unserer Lampe, zweimal in Mus. Passer. III, 95 und auf einer in Rom erworbenen Lampe des Götting. arch. Instituts, mit einem Punkte in dem ersten C bei Urlichs a. a. O., mit einem Punkte hinter dem O in der Mitte auf Leydener Lampen bei Janssen Mus. L.-B. Inscr. p. 150, n. 211, t. 1 XXXI, 31, u. Monum. n. 556, auf der Campana'schen Lampe n. 177, mit zweien C. CLO. SVC bei Birch p. 406 und bei Hübner Inscr. Hisp. n. 4969, 17 (zwei Exemplare), mit dreien C. CLO.S.VC auf drei Lampen der früheren Durand'schen Samml. n. 1784, welche zugleich dieselbe Darstellung (Adler auf Blitz) haben. Vermuthlich ist derselbe Name gemeint auf der Campana'schen Lampe n. 269: CCLO ... G. Das Schluss-O der Kestner'schen Lampe steht, wie auch Hr. Fromme versichert, fest. Wo es sich noch einmal findet, darf wohl ein Irrthum im Stempel selbst angenommen werden. Passeri führt in den Proleg. T. I, p. XII auch CAI. CLO.SVC. an. Janssen deutete Caji CLOdii SVCciani, indem er an die von ihm irrthümlich als verderbt betrachtete Inschrift auf einem Gefässfragment (n. 212) sich erinnerte. Hübner dagegen: C. Clodii Successi. Das vollständige nomen und cognomen C. CLODIVS SUCCVS verzeichnete schon Birch p. 466 von einer Lampe, deren Aufbewahrungsort er uns leider nicht angegeben hat. Succus als Töpfer bei Schuermans p. 252, n. 5326 u. 5327.

Der Buchstabe, welcher in n. 5 unmittelbar hinter C.IVLI stand, ist undeutlich. Eine ganz gleiche Inschrift ist mir bis jetzt nicht aufgestossen. Sollte derselbe Name wie in n. 6 gemeint sein?

N. 6 ohne Zweifel: C. IVLi NICEFori. Derselbe Name steckt sicherlich in dem verderbten

CIVLI.VICFF auf der Lampe in Beger's Thes. Brandenb. III, p. 436, C = Montfaucon V, 203; vermuthlich auch in dem CIVLINICEA des Mus. Passer. II, 22. Birch führt p. 406 auf: C. IVL. NICEP., d. i. NICEPhori. Das cognomen findet sich als Töpfername öfters (Schuermans p. 189, n. 3864 fg.) Ob dasselbe anzunehmen sei in den Lampeninschriften CIVLINEC bei Fröhner Vas. u. Terrac. n. 734 und CIVLNIC in M. Passer. III, 103, 9, ist fraglich, da Birch p. 406 ausserdem auch die Inschrift C. IVLI. NICI bietet.

Zu n. 7. Die Inschr. wiederholt sich öfter: Mus. Passer. II, 76, bei Kenner S. 37, n. 165, in der Arch. Ztg. XXII, S. 124, endlich bei Dubois Coll. Pourt.-Gorgier n. 955 u. 857, welche beiden Exemplare inzwischen verdächtig sind nach p. 140, Anm. 4. Ob auch in CIVNAIF (Fröhner Vas. u. Terrac. n. 73, 2)? BIT lässt mehrere Deutungen zu. Unter den bekannten Töpfernamen steht zunächst Bithynus (Fabroni Vas. fitt. Aret. p. 44).

Zu n. 8 vgl. CLO. HELI bei Janssen M, L. B. I. p. 139 n. 93 u. Mon. n. 921 (aus Nordafrika u. Italien), so wie bei Kenner S. 50, n. 125 und Hübner Inscr. Hisp. 4969, b, wo unter a auch CL. OHEL. Birch kennt p. 406 auch eine Lampeninschr. CLO. HE. Derselbe p. 407: M. ELI. Auf einer Lampe des Leydener Mus., die aus Beja stammt, steht HELI (Janssen Mon. p. 133). Hübner hat, da sich 4997, 15 der Lampenmachername C. HELIANI findet, jene beiden Incshriften auf die Firma eines Clodius Helianus bezogen, was uns sehr bedenklich erscheint. Wir möchten rücksichtlich der ersten zunächst an einen Clodius Helius denken.

Zu n. 9 vgl. Kenner S. 86, n. 342. Die Angabe des V ist in diesem Namen sonst Regel:

vgl. Boissieu Inscr. de Lyon p. 434 u. 438, n. 40, Kenner n. 343 u. 344, Mezger E. III, 31, p. 61, ausser Licetus p. 980 fg. u. 1079, d. Froehner Inscr. terr. coct. n. 785 — 790 und Schuermans p. 94, n. 1561.

Vermuthlich steht in n. 10, a hinter dem I ein Punkt. Alle unter n. 10 aufgeführten Inschriften beziehen sich auf den C. Oppius Restitutus (nicht Respectus, Janssen Mus. L. Bat. I., p. 148, n. 186), der sich in derselben verschiedenen Weise auf Lampen so häufig angegeben findet wie kaum ein anderer, vgl. — um zuerst Lampen aufzuführen, deren Herkunft aus Rom ebenso oder ähnlich sicher steht, wie die der betreffenden Kestner'schen — D'Agincourt Recueil p. 68, n. 6—9, Müller Mus. Thorvalds. n. 187 u. 247, Cat. Campana n. 8, 41, 81, 103, dann Mus. Passer. I, 91, III, 84, II, 44 u. III, 58, Muratori Inscr. p. 503, 1, Vermiglioli Ind. ant., Perugia 1830, p. 64, n. 402 u. p. 65, n. 404, De Witte Cab. Durand n. 1800, 1810, Boissieu Inscr. de Lyon p. 435 u. 440, n. 102, wo irrig als Anfangsbuchstaben des cognomen RA angegeben werden, Chaudruc de Crazannes Rev. arch. VIII, Ann. 1851, p. 247 (wo COPRI. RES geschrieben ist), Spano Bullett. arch. Sardo A. IV, 1858, p. 88, 194, Catal. d. raccolta arch. Sarda p. 58, n. 10, 12, p. 61, n. 68, Kenner a. a. O., wo 11 Beispiele aufgeführt werden, die man im Register p. 122 angegeben findet, Schuermans p. 196, n. 4025, Hübner I. H. 4969, 41, a. b. Bei Hübner a. a. O., c findet sich G. OPP'; auf einer Leydener Lampe (Janssen Monum. n. 491) steht mit Weglassung des praenomen OPPI. RES. Passeri kannte nach Proleg. T. I, p. XI auch die vollständigere Inschr. OPPI. RESTIT. 32).

N. 11. Etwa C VI CIRI? Bei Birch p. 466

wird die Lampeninschr. CVIVRI angeführt. Auf einer Lampe des Leydener Mus., welche aus Italien stammt, steht nach Janssen M. L.-B. Inscr. p. 140, n. 99, IVLCIRI, nach dessen Monum. n. 1183 aber PVLCIRI, nur durch einen Druckfehler. Die Namen Cirius und Cirrus finden sich auch sonst auf Thongeschirr (Froehner Inscr. terr. coct. p. 30, Schuermans p. 88), freilich nicht auf Lampen.

Zu n. 12. Dieser Name, über den schon Licetus bemerkt, dass er in plurimis lucernis stehe, kann jetzt geradezu als der am meisten verbreitete bezeichnet werden. Wir haben ihn schon oben gelegentlich als auf Chios, zu Rom, Vienne und Lyon, in Süddeutschland, am Niederrhein, in Salona, London vorkommend kennen gelernt. Im Nordosten lässt er sich sogar in Schlesien auf Lampen nachweisen (G. Klemm Handb. d. Germ. Alterthumskunde, Dresd. 1836, S. 142, Anm. 4). Sonst erwähnen ihn ausser den bei Schuermans p. 123 fg. Angeführten noch Müller M. Thorvalds. n. 212 und Cat. Campan. n. 211, Mus. Passer. II, 52, Janssen Mus. L.-B. I, p. 138, 82 u. Monum. n. 1191 (aus Cortona), Cavedoni im Bull. d. Inst. arch. 1846, p. 31 (aus Fossalta bei Modena), Rev. archéol. XI, 1854, p. 114 (aus Lons), Hefner „Die röm. Denkm. Salzburgs u. seines weiteren Gebiets“ S. 15 und Bonstetten Recueil D'Antiq. Suisses T. XVII, p. 40, n. 19, 20, Birch II. p. 406, Kenner im Reg. S. 122, Mezger S. 74, A. 77, Hübner 4969,2 4 (zwei Exemplare), Pichler S. 15 (aus Oszöny), Düntzer Rhein. Jahrb, XXXV, S. 52. Auch in der früheren Hahn'schen Sammlung zu Hannover befand sich eine Lampe mit der in Rede stehenden Inschrift. Töpfer Fortis C. Titi: oben S. 223, Anm. 27.

Zu n. 13. Der erste, das praenomen enthaltende Buchstabe ist nicht ganz deutlich. Da aber Janssen Mus. L.-B. Inscr. p. 145 und Birch p. 407 G. NVMICII anführen, so zweifle ich nicht, dass auch auf der Kestner'schen Lampe G zu lesen ist, zumal da auf dieser hinter dem I am Schlusse die Spur eines Buchstabens zu sehen ist, in welchem man sicher ein zweites I anzuerkennen hat. Die beiden ersten Buchstaben des nomen sind lit. ligatae.

Zu n. 44. Nach Hrn. H. Kestner sehr verdächtig. Die Inschrift anlangend, so kann man zwischen IVLIaNI und IVLI NI . . . schwanken. Jenes setzt Froehner Inscr. terr. coct. p. 148 in der Londoner Inschr. IVLIINI . . . . voraus. Uns ist dieses wahrscheinlicher. CIVLLI in Cat. Camp. n. 187. Bei Müller Mus. Thorvalds. n. 179 eine Lampe mit LV(I) NICI. Vgl. sonst zu n. 6.

N. 15 ebenso in Cat. Campan. n. 89, bei Licetus n. 1025, in Mus. Passer. III, 103, und bei Kenner S. 64, n. 203. In C. Camp. n. 189: LCAEC. SAE, was auch Passeri Proleg. T. I, p. XII anführt. Die Inschr. L. CAECVAE bei Kenner n. 76 hat ohne Zweifel ganz dieselbe Beziehung. Hr. Fromme giebt als auf der Kestner'schen Lampe n. 253 (Victoria) vorkommend CAECSAE (allein) an. Eine Lampe des Mus. Thorvalds. bietet nach Müller die Inschr. (L) CAECSA(E). Hübner liest 4969, 13 Lucius CAEClius SAEcularis. Aber bei Birch II, p. 407 findet sich der Name vollständig ausgeschrieben: LVCIVS CAECILIVS SAEVVS.

Auch bei n. 16, a scheint uns nach Hrn. Fr's. Copie der Endbuchstabe unzweifelhaft ein E sein zu sollen. Die Inschr. LCAESAE findet sich ohne und mit Punkten hinter L häufig:

im Mus. Passer. III, 31 u. III, 93, 1, im Leydener Mus. nach Janssen Mon. n. 916, im Ant.-Cab. zu Wien an neun Lampen, vgl. das Reg. bei Kenner S. 223, in der Samml. Campana n. 283, bei Mommsen Inscr. Helv. 350, 6. Passeri führt in den Proleg. T. I, p. XII an: L CAE. SAE. Einzig steht da LCAESAS bei Hübner Inscr. Hisp. 1869, 14, der an Lucii Caecilii Aspri dachte, während es doch wohl wahrscheinlich ist, dass in dem S ein Fehler steckt. Bei den Smetius Antiq. Neomag. p. 126 u. Licetus De lucern. ant. recond. p. 199, III findet sich als Lampeninschr. angegeben L. CAES, in Cat. Campana L. CAESA, bei Janssen Mus. L.-B. Inscr. p. 132, n. 29 u. Birch p. 407 L. CAESA. F, bei Kenner CAESA allein (S. 68, n. 229), Inschriften, welche nicht mit vollständiger Sicherheit hieher gezogen werden können, vgl. Schuermans p. 70, n. 959 u. 960, und A. Jahn Kanton Bern p. 89, trotz Froehner Inscr. p. 22, n. 519. Auch C. CAESAE kommt als Lampeninschrift vor: in Mus. Passer. II, 33 u. III, 103, 22 und bei Kenner S. 36, n. 56; vgl. auch Urlichs Verz. S. 39, n. 39: C . . . AESAE. Mommsen liest Inscr. p. 85, zu 3502 L. CAe(cilii) Sae(cularis); Hübner denkt a. a. O. betreffs des nomen an CAEsius. Ich stimme insofern mit Mommsen überein als ich glaube, dass es am gerathensten ist CAESAE ebenso zu deuten wie CAECSAE.

In n. 17, a auch nach Hrn. Fr. das B am Ende und in 17, 6 das S am Ende stehen. Dennoch sind gewiss beide Buchstaben als fälschlich für E gesetzt zu betrachten (denn dass F = fecit gemeint wäre, ist nicht so wahrscheinlich). Die Inschr. LCASAE ist nicht selten, vgl. Müller Mus. Thorvalds. n. 152 u. 231, Ur-

lichs Verz. c. 39, n. 42, so wie Kenner im Reg. S. 129 (wo fünf Beispiele). Dieser führt S. 42, n. 87 von einer Lampe mit dem Brustbild des L. Verus auch die Inschr. CASSAE an, betreffs deren er hier frageweise, aber im Reg. S. 122 ohne Fragezeichen an CAESAE denkt, während auch die Möglichkeit des Gedankens an CASAE (sodass SS wie zuweilen für S gesetzt wäre) vorhanden ist, ja dieser Gedanke dadurch noch grössere Wahrscheinlichkeit gewinnt, dass eine andere Lampe des K. Ant.-Cab. zu Wien mit dem Brustbilde Marc Aurels S. 42, n. 86 bei Kenner die Inschr. L. CASAE hat. Nach demselben kommt n. 102 auch CASSA vor. CASA AVG als Töpfernamen bei Schuermans p. 76, n. 1122.

Die letzten vier Buchstaben in n. 18 stehen nicht ganz so sicher wie die vorhergehenden. Man vgl. besonders Mus. Passer. III, 40, dann auch III, 103, 19, ferner LFABRAGA bei Kenner S. 68, n. 230 u. S. 68, n. 253, LEABRAGA bei Walther „Das Grossh. a. Mus. zu Darmstadt“ S. 48; auch die Inschrift LFABRIRAC, Kenner S. 34, n. 42 (nebst Bericht. S. 125) kann in Betracht kommen. Ob die Inschrift S. 68, n. 68 von Kenner richtig als LFABRIHE(L)VII gefasst ist, bezweifeln wir sehr. Aus Mus. Passer. I, 77, II, 41 u. III, 103, 10 kennen wir LFABRIAEVEI, durch Birch p. 407 L· FABR· AEAE, aus Cat. Campana n. 221 u. 232 LFABR CIEVFI und L. FABRICI EVEI. Aevius ist ein aus Muratori Inscr. 957, 9 bekannter Zuname. Vielleicht steckt er auch in dem AE IVS bei Hübner 4969, 5; sicherlich in AEVI bei Schuermans p. 36, 113. Gehört hieher vielleicht auch L. FABRICIME im Cat. Campana n. 56? Noch häufiger kommt die auf einen

L. Fabricius Masclus lautende Inschrift vor. Das cognomen, am vollständigsten ausgedrückt in Mus. Passer. III, 103, 14, ist als Töpfername bekannt, vgl. Schuermans p. 169 und jetzt auch Hübner n. 4970, 306. Meist findet man LFABRICMAS. Auch LFABRICMASC kommt mehrere Male vor. Vermuthlich ist nichts Anderes gemeint mit L. FABRIC. MASO bei Fabretti Inscr. p. 515, 212. Dass LFABPICMAC bei Kenner S. 36, n. 5, wenn das C am Ende sicher steht, nicht anders zu beziehen ist, versteht sich von selbst. Dass FABRIC MASI auf einer zu München befindlichen, aus Rom stammenden Thonlampe wirklich zu lesen sei (J. von Hefner »Das Röm. Bayern«, Aufl. 3. S. 276, n. CDXVIII), bezweifle ich einstweilen. Auch L. FABR ohne cognomen kommt vor, nicht bloss bei Birch p. 407, sondern auch in dem (von diesem nicht berücksichtigten) Mus. Thorvalds. n. 190, wo Müller ohne Wahrscheinlichkeit L FABR(ICMAS) ergänzte.

N. 19 findet sich ebenso auf den Lampen bei Campana n. 35 u. 154, sowie in Mus. Passar. III, 103, 15. Also steht das T wohl sicher. Derselbe Name ohne Zweifel LMMIT bei Janssen Mus. L. B. I. p. 144, n. 141. S. oben S. 219 fg., Anm. 20.

Mit n. 20 stimmt LMNPHILE bei Kenner S. 62, n. 197 bis auf die Nichtandeutung des V überein. Bei Birch II, p. 407: L. M. PHI. Bezüglich des nomen denkt man wohl zunächst an Munatius, betreffs des cognomen an Philetaerus oder Philetus, Phileros, Töpfernamen bei Hübner n. 4970, 389, und n. 4970, 390 (?), und Fabroni Vas. fitt. Aret. p. 45 u. pl. IX, fig. 74, so wie Hübner 4970, 388.

Vor n. 21 ist sicherlich ein F ausgefallen,

FLORENT findet sich auf Lampen nicht selten; vgl. zunächst D'Agincourt Rec. p. 67, Mus. Thorvalds. n. 186, Cat. Campana n. 203, dann Mus. Passer. III, 20, Schuermans p. 122, 2267, Janssen Mon. 741, Kenner im Reg. S. 122, Urlichs S. 38, n. 24.

Dieselbe Inschrift wie in n. 20 ist sicherlich bei Mommsen Inscr. Helvet. 350, 23 vorauszusetzen, denn das C statt eines L am Anfang beruht doch wohl auf einem Irrthum, wenn auch im Stempel; PASISIDI bei Janssen Mus. L.-B. Inscr. p. 146, n. 166, der aber Mon. n. 660 L PASISIO giebt, während das Facsimile auf Taf. XX der Inscr. von dem L nichts und statt des O ein deutliches D zeigt. LPASISIO findet sich im Mus. Passer. III, 103, 6, und bei Kenner im Reg. p. 123, während der Text S. 36, n. 54 L PASISID angiebt. Birch führt p. 407 L·PASISID·O und L. PASISI·R an. Letzterem zunächst steht L. PASISIR.. bei D'Agincourt Rec. p. 87. Die Richtigkeit des R in den beiden letzten Fällen steht durchaus dahin. Auch an der des O am Schlusse (das übrigens ebenso wenig befremdlich wäre wie bei n. 3) darf wohl noch gezweifelt werden. Demnach theile ich noch jetzt mit Mommsen ab: L PAS ISID.

Die Inschrift n. 23 ist mir sonst auf Lampen nicht vorgekommen, wohl aber auf einem Marmor aus Rom bei Mommsen Inscr. Neap. n. 6833. Vgl. auch Cardinali dipl. imp. p. 53, u. O. Jahn Spec. epigr. p. 87. Ob MAMA . . . unter den Töpfernamen bei Fabroni a. a. O. p. 45 hieher gehört?

N. 24 findet sich auch auf einem Thongefässe in Spanien bei Hübner n. 4970, 299. Auch sonst kommt der Name öfters vor. Also dürfte der Endbuchstabe nicht auf officina zu beziehen sein.

In n. 25 stehen die drei ersten und die drei letzten Buchstaben sicher. Das mittelste Zeichen hat Hr. Kestner so wiedergegeben, dass man an eine Ligatur von T und L denken muss, Hr. Fromme dagegen hat N gelesen. Eine auch nur ähnliche Inschrift ist mir noch nicht aufgestossen.

Zu n. 26 stellt man wohl MVNIRES bei Kenner S. 88, n. 366, aber gewiss nicht weniger MVNT · RES und MVNT · REST · bei Birch p. 407, MVNTREII bei Urlichs S. 39, n. 45, MVNTPEPI bei Janssen Mon. n. 866, MVNTRIPI im cat. Durand n. 1815, 2, so wie MVNTREPT bei Müller Mus. Thorwalds. n. 193, in der Rev. arch. 1858 p. 556 (auf einer Lampe, die zu den in Cosa im Depart. Tarn-et-Garonne entdeckten Alterthümern gehört) und bei Kenner S. 61, n. 191. Auch . . . . VNTRE . . bei D'Agincourt p. 67 gehört sicherlich hieher. Ausserdem etwa noch die sehr undeutliche Inschrift auf der Kestner'schen Lampe n. 85 /\VN?R (oder wollte man etwa an LVNARIS, Schuermans p. 156, n. 3080, denken?). Vermuthlich ist der zweite Name der eines Treptus, der bei Hübner n. 1502 vorkommt, wie die andere Form Threptus bei dems. n. 1025. Bezüglich der von Kenner und Birch angeführten Inschr. überrascht freilich der gleichmässige Irrthum im Wechsel von S und P; jedoch möchte ich nicht gerathen finden deshalb an einen Munatius Restitutus zu denken.

Der erste Buchstabe in n. 27 ist ohne Zweifel ein O, der zweite, welcher mit ihm in Ligatur steht, lässt zunächst an ein T denken, könnte aber auch ein F sein sollen. OF für officina kommt wohl zuerst in den Sinn. Der folgende Buchstabe ist wie ein Griech. Λ, welche Form ja auch in Röm. Inschr. für L vorkommt. Den

darauf folgenden, dessen Seitenstrich bei Hrn. Kestner etwas schräg, bei Hrn. Fromme aber gerade ist, wird man jedenfalls zunächst für ein auf den Kopf gestelltes L zu halten haben. Also etwa OF ⅃OL HER. Eine gleiche Inschr. unbekannt.

Die beiden nächsten Buchstaben hinter dem Q in n. 28 sind ähnlich wie bei n. 13 verbunden. Sie können, so viel ich mich erinnere, NV, aber auch MV gelesen werden. Bei Kenner findet man zweimal, S. 35, n. 18 und S. 36, n. 52, QNVMICEL, dem Anscheine nach ohne Ligatur. Birch hat p. 407 die Inschr. Q. MAMI. CEL, welche, wenn man das A als ein auf den Kopf gestelltes V betrachten dürfte, für die andere Lesung veranschlagt werden könnte.

Die Inschrift PACCI, n. 29, auch im cat. Campana n. 153; P. ACCI bei Birch p. 407 und bei Hübner n. 4969, 4 (auf einer von auswärts nach Madrid gekommenen Lampe). Müller führt als Inschr. einer Lampe im M. Thorvalds. an ... V P. PACC (?). Das Praenomen C ist bis jetzt auf Thonsachen noch nicht nachgewiesen, es sei denn, dass C. PACO bei Mommsen Inscr. Neap. 6307, 44 hierher gehöre. Der Name ΠΑΚΙΟΥ (sicherlich) in opere figlino Mus. Borbonici Corp. Inscr. Gr. n. 8511. An den Namen Pacius kann man auch betreffs der Lampeninschrift bei Düntzer Rh. Jahrb. XXV, 46, n. 2 denken.

N. 30. Gewiss zwei Wörter: PHA CVC. Ersteres etwa Phaon (Hübner Inscr. Hisp. n. 4976, 22) oder Phasis (Tabelli p. 521), eher als Pharnaces (Hübner 4970, 384) oder Phallaeus (Fabroni p. 45). Zu letzterem vgl. Antich. di Erc. VIII, p. 183, zu t. XXXVII, 1 und bes. Schuermans p. 103, 1790 fg.

Der Buchstabe unter VIBI in n. 31 (welcher nicht genau wiedergegeben werden konnte) ist ohne Zweifel ein auf den Kopf gestelltes A; also VIBIA. Ueber die schon oben S. 218, Anm. 18, S. 223, A. 27 berührten Lampeninschriften VIBIA, VIBIAN VIBIANI, VIBIANVS vgl. man ausser den Stellen bei Schuermans p. 268 auch Muratori I, p. 803, n. 10 (aus Bologna) und Kenner n. 377—380. Die Inschr. auf einem Gefässe aus rothem Thon bei Hübner 4970, 547 VIBW dürfte doch nicht sowohl Vibiani als Vibi manu bedeuten sollen (s. Froehner Inscr. p. XXIII, 10).

Anmerkungen.

1) Bekanntlich waren die Lampen bei den Griechen ungemein viel früher in Gebrauch als bei den Römern. Aber während Römische Lampen in den Sammlungen von Mittel- und West-Europa äusserst zahlreich und auch durch Abbildung oder Beschreibung bekannt sind, steht es mit der allgemeinen Kunde von Lampen aus den Ländern des specifisch Griechischen Culturkreises ganz anders. Lange Zeit hat man geglaubt, dass die Griechen keine Lampen in ihre Gräber setzten (Pittur. d'Ercolan. T. IV, p. 277, n. 4). Den Irrthum dieser Annahme hat schon Raoul-Rochette Troisième Mémoire sur les Antiq. chrét. des Catacombes in den Mém. de l'inst. Roy. de France, T. XIII, p. 568 fg. durch Anführung von Beispielen aus verschiedenen Gegenden nachgewiesen. Von Fiedler „Reise durch alle Theile des Königr. Griechenland" Th. I, S. 285 und Taf. III, 18. Th. II, S. 54 fg. u. Taf. II. u. III, f. 14 u. 15, S. 225 u. Taf. III, 16 erhalten wir Kunde über Lampen, die bei Trözen und in Gräbern auf Chiliodromia (dem alten Ikos, vgl. Ross „Königsr." II, S. 39 fg.) gefunden sind, sehr unscheinbare, aber doch nicht ganz unwichtige Stücke, die auf Chiliodromia zugleich mit Vasen, aber kleinen und unbemalten. Nach den Beobachtungen, welche Ross in den ihm bekannt gewordenen Griech. Gegenden machte und „Arch. Auf." I, S. 70 mittheilt, „haben wir in den Grie-

chischen Gräbern der Römischen Zeit als constante Ausstattung die Grablampe mit Figuren in Relief, von der sich in den Gräbern aus den Jahrhunderten der blühenden Keramographie unter den gemalten Vasen, und selbst noch später, keine Spur findet.“ Anders stellt sich die Sache in anderen Gegenden nach den Belegen bei R. Rochette a. a. O., vgl. auch Bullett. de l'inst. di corr. arch. 1854, p. XI, und Compte rendu de la comm. imp. arch. de St. Pétersbourg 1859 p. X fg. In den Reisen auf den Griech. Inseln III, S. 55 erwähnt Ross eine ganz eigenthümliche Thonlampe von Anaphe. Mehrere aus Gräbern stammende derselben Art sah er auf Karpathos, „hoch und kelchförmig, mit grüner Glasur“ (Arch. Aufs. I, S. 71). Er hält sie für morgenländische Erzeugnisse, denn ganz ähnliche gebe und beschreibe Layard als aus den Assyrischen Grabungen hervorgegangen. Dagegen spricht Birch Hist. of anc. Pottery Vol. I, p. 121 von Lampen Griechischer Fabrik aus der Seleukidenzeit, die L. in Nimrud gefunden habe, vgl. auch Niniveh und Babylon, übers. von Zenker, S. 452 u. Taf. XXI. n. H. — Ein ausserordentlich grosser Fund von Lampen (etwa 3000 Stück) wurde von Barker zu Tarsos gemacht, vgl. W. B. Barker Lares and Penates or Cilicia and its Governors ed. by W. Fr. Ainsworth, p. 200fg., auch p. 156 u. 189. Dann hat Charles Newton Kunde gebracht über Thonlampen, die nicht aus Gräbern stammen, zu Budrun, Branchidae und namentlich zu Knidos (vgl. die Schriften A history of discov. at Halicarn. Cnidus and Branchidae, namentlich pl. LXXXIV u. II, 2, p. 394 fg., und Trav. and discov. in the Levant II, p. 185), die meisten aus Röm. Zeit, darunter einige mit acht oder zehn Dochtöffnungen. Zu Budrun fand er in einer Röm. Villa auch eine Bronzelampe (Hist. of disc. II, 1, p. 306). Derselbe entdeckte auch auf Kalymna eine bedeutende Anzahl von Lampen. Besonders interessant ist die Notiz Ross's über die auf der Akropolis aufgefundenen zahlreichen Bruchstücke verschiedener Arten von Lampen aus der Zeit vor dem zweiten Perserkriege, „die wahrscheinlich bei den Opfern zu brennen pflegten“, in den Arch. Aufs. I, S. 139 fg. Eine in Beziehung auf die Arbeit eigenthümliche Art von Lampen aus viel späterer Zeit, die als in Alexandria eigenthümlich gilt, führt Birch unter der Rubrik enamelled ware a. a. O. II, p. 376 an. Einige Lampen, die ich aus der Verlassenschaft des früheren Aegypt. Leibarztes Schle-

dehaus als aus Alexandria stammend für die hiesige Universitätssammlung gekauft habe, darunter eine mit der Inschrift ΕΥΤΥΧΟΥ unter dem Boden, unterscheiden sich nicht von der currenten Sorte. Ebenso verhält es sich allem Anschein nach mit den 5 aus Aegypten stammenden Lampen, welche F. Kenner: „Die antiken Thonlampen d. K. K. Münz- u. Ant.-Cab. und d. K. K. Ambrasser-Samml." im Archiv f. Kunde österreich. Geschichtsquellen Bd. XX, 1858, unter n. 71, 435, 311, 323, 431 verzeichnet. Auch in Südrussland sind, nicht bloss in Gräbern, Thonlampen aufgefunden. Doch wissen wir über dieselben nur wenig. In der Ermitage zu St. Petersburg ist nur eine beschränkte Zahl zu sehen: vgl. Antiq. du Bosph. Cimmér., St. Pétersb. 1864, p. 79. Einzelne Stücke werden gelegentlich in dem Compte r. von Stephani kurz erwähnt; abgebildet oder genauer beschrieben sind nur einige wenige, z. B. in dem uns hier nicht zugänglichen Werke von Aschik, bei B. de Koehne Mus. du pr. Kotschoubey pl. XXVI, n. 3 u. p. 394 fg., A. Ouwaroff Rech. sur les antiq. de la Russie mérid. et des côtes de la mer noire, Paris 1855, pl. XIX, 3, und Duncan McPherson Antiq. of Kertsch, London 1857, pl. VII, p. 101, und die aus Römischer oder gar erst aus Byzantinischer Zeit. Neulich ist auch aus den Gräbern von Dali auf Kypros eine Reihe von Thonlampen zu Tage gebracht: s. W. Froehner Antiq. Chypriotes provenant des fouilles faites en 1868 par M. de Cesnola, Paris 1870, p. 20. Einige in Deutschen Sammlungen befindliche aus dem eigentlichen Griechenland stammende Lampen sind kurz beschrieben von C. v. Lützow Kat. d. Ant.-Samml. Thiersch S. 17 fg. (worunter n. 376 mit Griech. Inschrift ohne Zweifel unecht) und Urlichs Verz. d. Ant. Samml. d. Univ. Würzburg I. S. 38, n. 26, u. S. 40 fg. n. 58—78. Die wichtigste, wenn auch nicht grösste Sammlung Griechischer Thonlampen dürfte die der archäologischen Gesellschaft zu Athen sein, nach dem allgemeinen Ueberblicke zu schliessen, welchen Ch. Bigot in dem Bull. de l'école Fr. d'Athènes, Arch., N. II, Août 1868, p. 33—47 über den Bestand derselben gegeben hat. Hören wir doch, dass die sich wenigstens auf 200 belaufenden échantillons allen époques de l'art antique angehören und dass sich darunter nicht nur ungefähr ein Dutzend moules von Lampen befindet, sondern sogar deux modèles, prototypes sur lesquels on formera le moule à l'aide duquel le pro-

totype sera reproduit ensuite à l'infini. Auch in Betreff der Gestalt der Lampen findet sich Mannichfaltigkeit: doch lassen sich ähnliche Formen auch anderswo nachweisen: die p. 36 als la plus grosse du musée bezeichnete von der Form d'une trirème hat einen jedenfalls nicht nachstehenden Pendant in der Lampe von Pozzuoli die aus der Sammlung Durand's in die Hope'sche übergegangen ist (Birch a. a. O. I, p. 185). An Belegen für die verschiedenen Arten der Aufstellung der Lampen scheint es zu fehlen; wenigstens giebt Hr. B. nur ein Beispiel p. 43 fg. Um so mehr wird es erlaubt sein auf anderweitige, wenig bekannt gewordene Beispiele hinzuweisen. Man vgl. Licetus de lucernis antiq. recond. Utini MDCLII, p. 1253 fg., Lucern. fict. Mus. Passerii T. I, p. XXIII, Comarmond Descript. d. antiq. et obj. d'arts du pal. d. arts de Lyon, p. 67, n. 355 u. 366. und pl. IV, n. 366, F. Kenner a. a. O. S. 94, n. 408 fg, Auch Fiedler erwähnt a. a. O. II, S. 376 fg., Anm., als von Melos stammend und jetzt in Dresden befindlich, „ein paar antike runde Lampen, deren Boden sich in der Mitte hebt und durchbohrt ist, so dass die Lampe auf eine Spille gestellt werden kann.“ Noch interessanter ist in Betreff des von Alexis erwähnten ξυλολυχνούχου (Athen. XV, p. 700, c), über welchen der „Charikles“ auch in der zweiten Ausgabe I, S. 280 noch nicht Genaueres beizubringen hat, die Notiz von Ainsworth bei Barker a. a. O. p. 201: One lamp has the remains of the wooden candelabrum still adhering to it below, und die Bemerkung Ross's (Arch. Aufs. I, S. 139) über eine von den auf der Akropolis gefundenen, auf Taf. IX zur Hälfte wiedergegebenen Lampen „sie habe einen höheren, mit einem Olivenzweige bemalten und an fünf Stellen mit runden Löchern durchbohrten Fuss, um sie auf einem hölzernen Untergestell befestigen zu können“. Ein paar eigenthümliche verschiedene Beispiele kleiner mit einem Griff versehener gewöhnlicher Stehlampen, die zugleich zum An- oder Aufhängen eingerichtet sind bei Fiedler Taf. III, 16, vgl. S. 225, und in der Rev. arch. XVI ann. pl. 372, n. 2 bis, vgl. p. 560. Die von Hrn. B. besprochene Sammlung erhält dadurch einen besondern Belang, dass nach p. 46 un grand nombre de ces lampes portent des inscriptions, le plus souvent sur le col (soll ohne Zweifel heissen: cul) de la lampe, en certains cas sur la face supérieure disposée circulairement. Ueber die von Tarsos bemerkt Ainsworth a. a.

O.: none have the names of makers, one alone being impressed below with a thunderbolt and cross. Auch in Betreff der anderen in neuerer Zeit durch die oben angeführten Schriften bekannt gewordenen Griechischen Lampen hören und sehen wir von solchen Namen nichts Genaueres. Hr. B. würde sich durch genauere Bekanntmachung namentlich der Lampen, deren Verfertigung vor die Zeit der Römischen Kaiser fällt, welcher selbst Birch a. a. O. I, S. 184 fg. noch sämmtliche Griechischen Lampen zuschreibt, ein grosses Verdienst erwerben, zu welchem Behufe es freilich nöthig sein wird auch die zerstreuten Exemplare in andern Sammlungen zu berücksichtigen. Sehr willkommen würde dabei auch eine Ermittlung der Fabrikstätten sein. Ob die aber auch par les représentations figurées zu ermöglichen sei, möchten wir sehr bezweifeln.

2) Die Sammlung Campana, welche nach den vor dem Verkaufe zu Rom verfassten Cataloghi 23 Candelaber und zwei grosse Lampen aus Bronze besass, enthielt nach dem Catal. d. Classe IV, sez. 10 im Ganzen 307 Thonlampen, welche S. 32—38 einzeln kurz verzeichnet sind. Dann kommt die Sammlung Thorwaldsen's, der ausser zwei bronzenen Lampen die thönernen besass, welche L. Müller Descr. des Antiq. du Mus. Thorvaldsen, Sect. I u. II, S. 121 fg. n. 144—267 genau beschreibt. Viel geringer war die Wagner'sche, jetzt in der Antikensammlung der Univ. Würzburg befindliche, welche von Urlichs a. a. O. S. 37 fg., n. 1—57 zugleich mit der Sammlung des Malers Brüls in Rom verzeichnet ist. Ueber Fogelberg's „esimia raccolta" von Thonlampen, welche sich jetzt in München befindet, haben wir keine weitere Nachricht als die Hervorhebung einiger Exemplare in dem Bullett. d. Inst. di corr. arch. 1844, p. 40 fg. Auch der Preuss. General-Consul Bartholdy gehörte zu den mit A. Kestner gleichzeitigen Röm. Sammlern, aber die Zahl der von ihm zusammengebrachten Thonlampen war eine ausserordentlich kleine, vgl. Panofka Mus. Bartoldiano p. 153. Unter den späteren Sammlern, über deren Lampenbestand wir einige Kunde haben, nimmt Hr. de Meester die erste Stelle ein.

3) Von einer Bekleidung mit anderem Metall, wie sie für die von Passeri erwähnte Lampe noch Millin Mon. ant. ined. T. II, p. 166 anzunehmen geneigt war, findet sich nicht die mindeste Spur. — Es ist für Manchen wohl nicht ohne Interresse bei dieser Gelegenheit zu

hören, dass die Kestner'sche Sammlung an Gegenständen aus Blei, die wegen ihrer Vergänglichkeit so selten sind, nach der gefälligen Mittheilung ihres jetzigen Besitzers noch enthält „zwei Statuetten der Minerva, beide im Zerfallen begriffen, eine Statuettina der Aphrodite Anadyomene, ohne Kopf, ebenfalls zerbröckelnd, eine kleine Venusbüste, gut erhalten, vielleicht in Folge der Beimischung eines anderen Metalls, ein kleines Basrelief, ein Maulthierfigürchen und die bekannten Schleuderbleie mit Legionszeichen, theils gut erhalten theils zerbrökelnd".

4) Die von Boldetti Osservaz. sopr. i cimet. de' SS. Martiri p. 525 angeführten Namen (Donati, Anni, Fortis, Strobili) sind, dem Zusammenhange seiner Worte nach zu urtheilen, nicht von Katakombenlampen entlehnt.

5) Inscr. confoeder. Helvet. lat. p. 85, zu n. 350: complures ex his lucernis et cis et trans Alpes reperiri solent, ut sunt n. 3. 11. 12. 20; quod non observavi in vasis cretraceis scriptis. Cui consentaneum est non reperiri in his nisi cognomina sola eaque saepissime satis barbara, nunquam trium nominum figulos; contra lucernas qui fecerunt, saepe nomina scripserunt ratione plane Romana, ut Q. C. C., L. Cae (cilii) Sae(cularis) alia. Lucernarum igitur quae in Galliis reperiuntur majorem partem ex Italia adlatam esse puto; quod secus evenit in reliquis vasis opificii omnino multo simplicioris.

6) Das umfassendste Verzeichniss von Inschriften auf Thon- Lampen und Vasen, welches wir jetzt besitzen, ist das von M. H. Schuermans in den Annales de l'acad. d'archéol. de Belgique, XXIII, 2 Sér., T. III, Anvers 1861 unter dem Titel Sigles figulins (époque rom.) zusammengestellte. Es schliesst sich an W. Froehner's für ihre Zeit verdienstlichen Inscr. terrae coctae vasorum intra Alpes Tissam Tamesin repertas, Gotting. MDCCCLVIII, geht aber über die Grenzen, welche sich dieser gesteckt hatte, hinaus, indem es auch andere Länder des Römischen Culturkreises berücksichtigt. Die Zusätze zu Froehner's Schrift sind sehr zahlreich, obgleich der Verf., wie er S. 27, A. 1 bedauert, Adr. de Longpérier's bedeutende Sammlungen noch nicht benutzen konnte und trotzdem, dass er nicht einmal von Alph. de Boissieu's Inscr. ant. de Lyon und von Kenner's oben angef. Katalog Kunde erhalten hatte. Für Dalmatien, Italien, die Insel Sardinien, auch Nordafrika, konnte aus den gelegentlich in diesem unsern Aufsatz angeführten

Schriften, welche schon vor 1867 erschienen, gewiss auch aus G. Gamurrini Le iscr. d. ant. vas. fittili Aretini, R. 1859, welche Schrift mir nicht zur Hand ist, ausserordentlich viel geschöpft werden; für Italien ist nicht einmal Passeri's Werk benutzt, das doch dem Verf. dem Namen nach bekannt und zugänglich war. Für Spanien bringt jetzt der von E. Hübner besorgte zweite Band des Corp. insc. lat. reiche Nachträge. So bietet Sch's Arbeit auch für meine obige Behauptung rücksichtlich der Schweizerischen Lampen nicht die Belege, welche ich bei beschränkten Mitteln geben kann. Mehrere werden unten gelegentlich beigebracht werden. Hier nur Folgendes. IEGIDI kommt auf Lampen, abgesehen von Süddeutschland, auch zu Verona vor. Auf Gefässen findet sich der Name auch zu Arezzo und in Spanien (Schuermans p. 136, Hübner 4970, 238). CPVFSEC findet sich auch im Mus. Thorv. n. 220. Der Name SAECVL (auch SAEGVL geschrieben, bei Kenner n. 30) welcher seit Licetus von mehreren Lampen her bekannt und jüngst auch für Spanien bezeugt ist (Hübner a. a. O. n. 49 69,49), erscheint auf den Thorwaldsen'schen Lampen n. 175 u. 228 nach L. Müller mit einem I am Ende (SAECVLI) welches sicherlich nicht die Stelle eines Buchstabens vertritt. Dass eigentlich SAECVLF gemeint war, hat sein Bedenken, schon deshalb, weil der Name das eine Mal tracé à la pointe, das andere Mal en relief erscheint. IASAVGV, bei Mommsen n. 350, 27, gehört eigentlich nicht hieher, da die Lampe ex Italia allata. Es sei inzwischen bemerkt, dass nicht sowohl PASAVGV (s. Kenner n. 193) gemeint war, als IAS. AVGV, also keine Verderbniss vorauszusetzen ist. Unter den Lampenmachernamen bei Birch Anc. Pott. II. p. 406 kommt vor C. IAS. AVGV. Die Namen Iasus, auch Iassus, Iaso, auch Iasso, finden sich unter denen der Töpfer öfters, jener auch zu Arezzo, vgl. Schuermans p. 135 u. Hübner 4970, 236 u. 235. Sollte bei CVNCNAC nicht das auch sonst verderbte CIVNDRAC beabsichtigt gewesen sein? — Wer die Verzeichnisse der auf Lampen vorkommenden Namen für Lyon bei Boissieu p. 434 fg. und die mit denen für Regensburg und Augsburg bei J. v. Hefner „Das Röm. Bayern" 3. Aufl. S. 277 fg. und M. Mezger „Die Röm. Steindenkmäler, Inschr. u. Gefässstempel im Max.-Mus. zu Augsburg" S. 58 fg. vergleicht, dem wird eine beachtenswerthe Uebereinstimmung in manchen Fällen nicht entgehen. Einzelne Namen hat nur die

Schweiz und Süddeutschland gemeinsam, oder nur Lyon nebst Verona und Süddeutschland oder nur jene und die Schweiz. Aber während es sich für die beiden erstgenannten Stätten auch nicht durch das mindeste Anzeichen wahrscheinlich machen lässt, dass die eine für die andere die Waare geliefert habe, stellt sich die Sache für den zweiten und besonders für den dritten Fall anders. Bezüglich der figline nahm Mommsen schon in dem Aufs. über Boissieu's Inscr. de Lyon Ann. d. Inst. ar. XXV, 1853, p. 81 wegen des Umstandes dass sich ein Lyoner Stempel, CFAXFVCIS F, in der Inschrift eines Gefässes aus Augst LAXTVCIS F (s. auch Inscr. Helvet. n. 352, 112) wiederhole, Import von dort nach hier an. Für den Import von Lampen aus Lyon nach der Schweiz lassen sich noch viel scheinbarere Belege beibringen. — Von mit gleichen Verfertigernamen versehenen vasa cretacea aus Italien und den Ländern diesseits der Alpen lassen sich jetzt Beispiele zur Genüge nachweisen. Desgleichen fehlt es jetzt nicht an Beispielen von trium nominum figuli auf Gefässen aus den cisalpinischen Ländern. Das Vorkommen von cognomina sola ist auch für die in Italien gefundenen Lampen das Gewöhnlichste. Von manchen Lampenverfertigern, welche drei Namen hatten, findet sich jenseits und diesseits der Alpen aller Wahrscheinlichkeit nach mehrfach nur das cognomen gebraucht. Ueberall können die Inschriften nicht für die Behauptung,. lucernarum majorem partem ex Italia adlatam esse als beweiskräftig gelten, da die Lampen mit Inschriften, wie jenseits der Alpen, so auch diesseits derselben, den bei weitem kleineren Theil des Gesammtvorrathes ausmachen, und die Ansicht, dass reliqua vasa opificii omnino multo simplicioris, kann man doch in dieser ihrer Allgemeinheit unmöglich gutheissen.

7) Boissieu Inscr. de Lyon p. 441 fg., zu n. 123 und Comarmond Palais des arts de Lyon p. 92, z. n. 542, u. p. 97, z. n. 569. Beide Male handelt es sich um Entdeckung von Töpferwerkstätten, in welchem sich Erzeugnisse mit den betreffenden Namen, und diesen allein, fanden. Den Namen C. ATISIVS SABINVS liest man auf einem zu Aosta aufgefundenen patera bei Bimardi in Muratori's Inscr. p. 133. 134, fig. 3. Er findet sich nach Chaudruc de Crazannes Sur quelques antiq. de la ville d'Agen (Aginnum des Nitiobriges) in den Mém. et diss. publ. par la Soc. des antiq. de France Vol. II, p. 378

wiederum sur un vase de terre cuite in einer Privatsamml. zu A. C. ATISIUS kommt nach Schuermans p. 55, n. 591 zu Allier vor. Uebrigens wäre noch genauer zu untersuchen, ob C. Atisius Sabinus von Aosta und von Lyon dieselben Personen waren. Bimardi bemerkt: in aliis (pateris) a me contrectatis occurrit L ATISIUS SECUNDUS et inde conjicio fratres Atisios figlinam Augusti una exercuisse. Er führt ausserdem von einem cippo colonorum agros determinante aus der Nähe den Namen C. ATISIVS PRIMVS an.

8) Vgl. Pal. d. arts p. 111 fg., n. 757, 761, 763, 765, 766.

9) S. Inscr. de L. p. 434 u. 439, n. 55. 56; p. 434 u. 437, n. 29, wo freilich CCESSI gegeben ist, während für das zweite C sicherlich ein D gemeint war; p. 435 u. 440, n. 82 (MARCEL).

10) Ob der des Marcellus auf Lampen, weiss ich nicht, vgl. sonst Schuermans p. 163 fg.; Dessi anlangend s. ausser dem von Schuerm. p. 107 Angeführten: Hübner Inscr. Hispan. n. 4699, 20; über Agilis (AGILIS. F) vgl. ausser Schuermans p. 37, n. 137. 138, Fr. Pichler „Das histor. Mus. des Joanneums" (zu Graz) S. 15, nach dessen (freilich nicht ausdrücklichen) Worten zu schliessen das betreffende Stück, eine Lampe, aus Pompeji stammt, während sonst der Töpfer dieses Namens nur diesseits der Alpen nachweisbar ist. Fortis betreffend s. unten Anm. 18, 19, 26 u. Absch. II, den Ind. nom. n. 12.

11) Den Stempel giebt Boissieu p. 443, n. 1 und Comarmond p. 16, u. 650 in Abbildung. Jener nimmt p. 444 unbedenklich einen Töpferstempel an, dieser macht p. 379 vorsichtiger die Bemerkung, dass auch d'autres fabricants, exerçant un art étranger à la céramique ont pu très-bien s'en servir pour marquer des objects sortant de leur fabrique. Selbst die Bäcker thaten das, wie Mommsen schon in den Ann. a. a. O. bemerkt hat. Den Namen ATIMETI signalisirte schon Licetus p. 1067. d, 1077. a. (hauptsächlich aus Nimwegen); dann die Herculanenser Lucern. p. 177, Anm. 5. Zu den bei Schuermans vgl. man ausser Kenner n. 226 u. 338 und Hübner a. a. O. n. 4669, 9, wo es sich um Lampen unbekannten Fundorts handelt, und Fr. Pichler a. a. O. S. 15, wo von einer Lampe aus Leibnitz die Rede ist, welche vielleicht schon bei Froehner, wenn auch nicht als Lampe erwähnt wird, Cavedoni Bullett. d. Inst. arch. 1846 p. 31 (Lampen aus Fossalta bei Modena), Cat. Cam-

pana u. 21, und unten Anm. 18 u. 19. Der Name stand auch auf einer Lampe der jetzt zerstreuten Hahn'schen Samml. zu Hannover.

12) Auch dieser Name gehört zu den schon von Licetus erwähnten, p. 213. b. 799. d. Zu den Anf. bei Schuermans p. 250 fg. halte man, ausser Kenner n. 375 u. 376, noch Anm. 19. Unter den Lampen des Lyoner Mus. kommt nach Boissieu p. 435 u. 442, n. 132 auch eine mit der Inschr. STROBIS vor, in welcher statt des S am Ende sicher ein L gemeint war.

13) Dahin gehört aus der Liste bei Boissieu p. 434 fg. der Name a, des C. Junius Draco (CIVNDRAC), welcher sich auf 12 Lampen des Leydener Mus. findet, unter denen Stücke aus Nordafrika und Italien, s. L. J. F. Janssen Mus. Lugd. Bat. Inscr. Gr. et Lat. p. 134, n. 50, ferner im Mus. Thorwalds. n. 229 (CIVNDRA), in Unteritalien (Mommsen Inscr. R. Neapol. n. 6308, 19; C. IVNI RAC, anscheinend nicht auf einer Lampe, in Capua, Schuermans p. 145, 2832), in Spanien (Hübner n. 4969, 28 nicht vollständig aber sicher), und sonst ohne Angabe des Fundorts erwähnt wird (De Witte Catal. Beugnot p. 103, n. 276, W. Froehner Griech. Vasen und Terrac. zu Karlsruhe n. 716(?) und 732); b. des Comunis (s. unten II, ind. nom. n. 9); c. CARINIA, zu Rom nach D'Agincourt Rec. de Fragm. de sculpt. ant. en terre cuite p. 67 u. 68, vgl. auch Campana n. 51 (CABINIA); d, des Crescens (CRESCES), Schuermans p. 100, n. 1714, 1715, Mus. Naniano t. 341, n. 91, unten Anm. 17, Hübner n. 4969, 19, im Mus. Passer. III, 87, Kenner n. 345—348 (zu Rom sur une potterie, Boissieu p. 438, Anm. 4); e. ERACLID (Mus. Pass. III, 12 u. 88, Kenner n. 188. 198. 302 (ohne Angabe des Fundorts) vgl. ERACLIO im Mus. Passer. III, 87, bei Mommsen Inscr. Helv. n. 350, 9 u. Schuermans n. 2083; f. des FESTVS, s. Schuermans p. 120 fg., Hübner n. 4969, 21, Kenner n. 353 (unbek. Fundorts); g. CLOLDIA (gewiss nicht verschieden von C LOL BIA bei Mommsen n. 350, 18 (aus Italien), auch nicht von CIOLDIA bei Kenner n. 13 und ELOLDIO bei Beger Thesaur. Brandenb. III, n. 442), findet sich auch in Mus. Passer. III, 41 sowie bei de Witte Cat. Durand n. 353 und Kenner n. 437, und als CLO.L.DIA bei Birch Anc. Potter. II. p. 406, ohne Angabe der Herkunft, endlich einmal mit einem Fehler im nomen vollständig ausgeschrieben auf einer lucerna aretina im Cat. Campana: CLOILI.DIADVM.

NI = C.Lolli Diadumeni; h. des Myro (Mommsen Inscr. Neap. 6308, 24, Antich. di Ercol. VIII p. 178, A. 3); i. NERI, bei Schuermans p. 189, D'Agincourt p. 67, gewiss auch Kenner n. 155 (NPRI); k. OPPI (öfters im Mus. Passer. mit einfachem und doppeltem I) III, 4, 39, 83, bei Kenner n. 136 u. 239; l. des C. Oppius Restitutus (s. unten II, Ind. nom. n. 10). Comarmond hat noch C.IVNI, womit zu vgl. Fabretti Inscr. p. 517, 251. Der Stempel NOVI bei Boissieu n. 97 ist sonst noch nicht nachgewiesen, wohl aber NOVIVW, NOVIVS und M NOVIVS, s. Schuermans p. 192, Hübner 4969, 40, cat. Campana n. 256.

14) Dahin gehören aus Boissieu's Liste OFF CER, Q HORA HYLA, LHOSCRI, CNOSCRI, OCTAVI, PHOETASPI u. a., nebst einigen der schon oben angef., wozu aus Comarmond noch hinzuzufügen ist C. IVNIA·AC. Der zweite Name kommt zwei Mal vor, ein Mal verderbt: QHORABILA. Er findet sich vollständiger in den Inscr. Helv. n. 350, 22: Q ORATI HYLAE. Vielleicht ist nicht davon verschieden Q HORA ..... bei L. Müller Mus. Thorvalds. n. 214. Phoetaspi (Schuermans p. 208, n. 4314) auch bei Kenner n. 222 u. 369, vermuthlich aus den Deutsch-Oesterr. Prov.

15) Ich muss es Anderen überlassen, die mir nicht zugänglichen Schriften, aus welchen man sich nach Schuermans p. 10 Kunde holen kann über les nombreux vestiges de fours, de tours, de moules de potiers, welche man in Frankreich entdeckt hat, genauer zu durchforschen. Was die Rheinlande betrifft, so bedarf es für obige Behauptung keiner Citate. Dagegen erlaube ich mir hier auf die beachtenswerthe eigenthümliche Angabe Düntzer's bezüglich der Sammlung des Herrn J. J. Merlo in Cöln in den Jahrb. von Alterthumsfr. im Rheinlande XXXV, S. 45 aufmerksam zu machen: „Töpferstempel finden sich meist nur auf gewöhnlichen Lampen, nicht auf ausgezeichneten, dagegen werden auch auf schönen Schalen die Namen der Töpfer häufiger bemerkt."

16) Der Name kommt auf einer in Regensburg gefundenen Lampe vor (Hefner a. a. O. S. 278), aber auch auf Lampen von Mainz (Jos. Emele Beschr. röm. u. deutsch. Alterth. in dem Geb. der Prov. Rheinhessen, Ausgb. 2, S. 73, Froehner n. 1580). Die drei betreffenden Ital. Lampen erwähnt Cavedoni Bull. d. inst. arch. 1846, p. 29 fg. Die Herkunft der Lampen mit demselben Namen bei Hübner n. 4969, n. 32 und bei Kenner

n. 365 ist unbekannt, letztere stammt vielleicht aus Deutsch-Oesterreich.

17) Vgl. Jahresber. des histor. Kreis-Vereins von Schwaben u. Neuburg $18^{51}/_{52}$, S. 6 fg. und Mezger a. a. O. S. 64 fg. Ueber FAOR vgl. Schuermans p. 218, n. 2164, der an der Identität mit FAVOR nicht hätte zweifeln sollen. Dieselbe Inschrift bei Kenner n. 351. Der Name findet sich so und FAVOR geschrieben auch sonst in Italien auf figlina, vgl. Fabretti Inscr. c. VII, n. 77—80, Mus. Thorvalds. p. 101, n. 292, Birch II, p. 346; Favor auch in Spanien (Hübner 4970, 186). Ueber Litogenes Mus. Passer. III, 106 und M. Naniano t. 341, n. 3, Schuermans p. 152, n. 2292 u. 2293. N und E am Schluss finden sich an dem Lampenmodel wie regelmässig als literae ligatae. Sollte das nicht auch in LITOGEN bei Kenner n. 213 der Fall sein?

18) Von Lanza werden in den Ann. d. Inst. arch. Vol. XXII angeführt Lampen mit den Namen FORTIS, VETIN. FESTI, *Vetinius Festinus* (so!), FRONTO, SISINEV AVR, *Sisineus Aurelius* (so!), con lettere a rovescio (p. 121), C. OCTAVI, PVLLI, FRONIO, PVLLAENI, APOLAVSTI (p. 121), CRESCES (p. 127), VIBIANI und ATIMETI (p. 132); bei Kenner HALTER (n. 70), FESTI (n. 353). Bei der zweiten Inschrift ist wohl zunächst an einen Vetinius Festus zu denken. Der erste Name ist sonst weder als der eines Lampenverfertigers noch als der eines Töpfers überhaupt bekannt. Fronto auf einer Lampe aus Zollfeld bei Pichler S. 15. Oefters findet sich auf Lampen Aufidius Fronto, (eher als Frontinus, Janssen Mus. Lugd. Bat. Inscr. p. 131, n. 14) erwähnt, vgl. ausser Schuermans p. 58, n. 646 fg., Janssen De Gr. Rom. en Etr. Monum. te Leyden p. 109, n. 571, Birch Anc. Potter. II, p. 406, Hübner Inscr. Hisp. n. 4969, 10. Ob Sisinev zusammenzustellen mit CISINEBI bei Froehner n. 741? Auch den Namen Aurelius allein kenne ich nicht von Lampen, wohl aber den des Aurelius Xanthus oder Xantus, AVRXAN (Mus. Passer. III, 103, 23, Cat. Campana n. 137 u. 243, Kenner n. 242, wo am Schlusse irrig ein M). Pullus oder Pullius ist als Töpfer unbekannt. Die Inschr. FRONIO soll nach L. eine neue sein, also wird er ein deutliches I vorgefunden haben) vgl. FRONI bei Janssen Mus. L. B. I. p. 138, n. 85, der an Frontini dachte (Froehner's FRONT. Inscr. p. 44, n. 1131 ist irrig) und Schuermans p. 124, n. 2305 (von einem Glase). Liegt kein Irrthum zu Grunde,

so wüsste ich nichts Anderes als FRONImi Officina: Phronimus bei Kenner n. 102 u. 120. Das praenomen C. vor OCTAVI nur hier. C. Pullaeni auf Lampen in Sardinien (G. Spano Catal. d. raccolt. arch. Sarda, P. I, p. 59, n. 16) und Spanien (Hübner n. 4969, 46); PVLLENI, PVLIENI (so!) und PVLLENORVM auf Lampen von jenseits der Alpen bei Janssen Gr. Rom. en Etr. Mom. p. 126, n. 918, p. 130, n. 1018, p. 128, n. 945. Apolausti auch auf einer Lampe in Spanien, aber originis incertae (Hübner n. 4969, 8); über Vibiani unten II, Ind. nom. zu n. 31. HALTER unbekannt als Töpfer (wenn nicht eben der MHAS bei Hübner 4968, der HAterius ergänzt, hieher gehört), nicht als Name in der Form ALTERIUS. — Beachtenswerth ist, dass Lanza die Lampen mit den oben im Text zuletzt aufgeführten Namen p. 132 bezeichnet als di una pasta più fina di quelle delle precedenti scavazioni, e portanti impressioni eleganti di oggetti. Demnach lässt sich mit Schein vermuthen, dass sie importirt seien.

19) Die Namensinschriften sind nach Smith a. a. O. ANTIMETI — ATIIM. F — EVCA. EVCARIS — FORTIS — STROBILI. Der zweite Name lässt sich auch am Niederrhein nachweisen, vgl. Schuermans p. 116. So sicher R. Smith's Ansicht steht, dass in London selbst Lampen gemacht wurden, ebenso unsicher erscheint mir seine Meinung, dass dahin nur die ganz gewöhnlichen, stets ohne Namensinschrift vorkommenden gehören, those of better workmanship and ornamented hingegen sämmtlich importirt seien. Es ist vielleicht nicht bloss zufällig, dass unter den vielen Stempeln mit dem Namen des Atimetus unsres Wissens keiner vorkommt, welcher die Eigenthümlichkeiten der beiden obigen zeigte. Dass sich keiner aller jener Namen von Lampenverfertigern in den potters marks on the red ware termed Samian discovered in London, p. 102 fg., wiederfindet, ist auch nicht entscheidend.

20) Der letzterwähnte Name ist CL. OHEL., Inscr. Hisp. 4969, 16, worüber unten II, Ind. nom. n. 8. Unter den übrigen häufiger und an entlegenen Orten vorkommenden wollen wir hier nur einige berücksichtigen, namentlich solche, die sich auch in Italien finden und nicht schon anderswo von uns besprochen werden. Ueber AEIVS, n. 5, unten Ind. nom. zu n. 18. LMARMI (Schuermans p. 166, n. 3322) auch im Mus. Thorv. n. 224 und im Cat. Campan. n. 82, bei Kenner n. 69 u.

230. Etwa identisch mit dem öfter vorkommenden LMAMIT (s. unten II, Ind. nom. n. 19), wie ja neben dem häufigeren CMEVPO noch CMAREV und CMAREVP einhergehen (Rev. arch. XVI, 1859, p. 560 fg.)? Zu MVN SVC vgl. Kenner Register S. 122. LMVNSVC bei Janssen Monum. te Leiden p. 115, n. 682 und öfters bei Kenner, s. Reg. p. 123. Sollte MY (n. 38) nicht Myro (oben Anm. 13, h) sein? MNAELVCI scheint von Delgado nicht richtig gelesen zu sein. Bei D'Agincourt findet sich p. 87 ... NNLVCI ..., p. 88 .. NNAELVCIS, im Cat. Camp. n. 297 NNAELVC und eben dasselbe bei Kenner n. 14. Der erste der beiden Namen ist sicherlich Annaeus, der zweite deutlich Lucius. Auch VICTOR kommt auf einer Lampe in Unteritalien vor (Mommsen Inscr. Neap. 6308, 36), auf Gefässen anderswo nicht selten. Die Namen der Verfertiger von Lampen, namentlich die selteneren finden sich öfters auch auf den in Spanien vorkommenden Vasen aus rothen Thon. Unter diesen erscheinen besonders häufig Namen Arretinischer Töpfer. Einmal wird sogar ein figulus Arretinus ausdrücklich erwähnt (n. 4970, 519), derselbe A. Titius, welcher mit Angabe des Wohnorts oder nur des Gewerks oder auch mit dem Namen allein auch auf Gefässen, die in Arezzo oder sonst in Italien gefunden sind, vorkommt (Schuermans p. 257, n. 5469 fg., Marquardt a. a. O. S. 202). Bei Hübner n. 4960, 520 ist ARIS nicht für ARRET gesetzt, sondern Name eines Töpfers, wie die in 521 u. 522 unter C. TITI stehenden, etwa Aristus, u. s. w., vgl. Schuermans p. 51, n. 482 u. 483. Ausser den Italischen finden sich auch Namen von Lampenverfertigern und Töpfern, die man in Südfrankreich antrifft.

21) Unter den 14 bei Spano Catal. p. 58 fg. und Bull. arch. Sardo I, 1855, p. 101 aufgeführten Lampen unter deren Boden Inschriften aus mehr als einzelnen Buchstaben stehen, finde ich nur vier, deren Namen anderswoher vollständig bekannt sind, darunter einer der häufigsten, der des C. OPPI. RES, zwei Male, und was beachtenswerth, der bei Janssen Mus. L. Bat. Inscr. p. 130, n. 11 angeführte, von Froehner und Schuermans mit einem „sic" notirte A SILI AC (so sind nach meiner Meinung die Buchstaben zu theilen). Möglich, dass auch PONTIANI (Cat. n. 20) in einer der Abbreviaturen bei Schuermans p. 210 fg. (vgl. auch Hübner 4669, 45) steckt.

22) Vgl. Mus. Passer. T. I, p. XIII fg. und Birch Anc. Pott. II, p. 376 fg.

23) Unter einer Lampe bei Muratori Inscr. 503, 18 findet sich eingepresst: EX OFF P. IVL TAR AD PORTAM TRIG, unter einer anderen im Mus. Passer. III, 7: EX OFF P.VETTI AD PORT TRIG. Mittelbare Zeugnisse giebt es auch für andere Plätze, namentlich Arezzo, vgl. z. B. Fabroni a. a. O. t. IX, n. 116.

24) Von den gewöhnlichen Lampen lässt sich gewiss dasselbe annehmen, was Marquardt a. a. O. S. 258 fg. in Betreff der Fabrikation anderer ordinärer Thonwaare darlegt, vgl. mehrere der Stempel bei Passeri I, p. XXI fg., so wie den mit IVLIAES bei Kenner n. 36.

25) Griechische Namensinschriften sind, so weit meine Kunde reicht, auf den Lampen Italiens, selbst des südlichen, sehr selten und enthalten meist mit Griechischen Buchstaben ausgeführte oder ins Griechische übersetzte Lateinische Namen oder auch Griech. Namen, die nebenbei auch latinisirt vorkommen. In die erste Kategorie gehört *ΚΕΛCΕΙ* (Antich. di Ercol. VIII, p. 178, Anm. 8, wo auch *CΕΛCΙ* von einer Lampe des Mus. Farn. erwähnt und die richtige Erklärung gegeben wird, Raoul-Rochette Trois. Mém. a. a. O. p. 569, Anm. 2, Mommsen Inscr. Neap. n. 6308, 11, Froehner Vasen u. Terrac. n. 691 u. 737, Schuermans p. 147, n. 2875, wo *ΚΗΛCΕΙ*, vgl. auch Birch II, p. 398: *ΚΕΛΕω*). *ΚΕΛCΕΙ* findet sich auch auf Sicilischen Lampen, wie R. Rochette nach Avolio berichtet, dessen Schrift Delle ant. fatture di argilla ich leider nicht zur Hand habe. Daneben kommt hier öfters die Inschrift *ΠΡΟΚ ΑΓΥΡΙ* vor, welche auch in einer eigenen Schrift von dem Abate Crespi besprochen wird. R. Rochette deutet *ΠΡΟΚΛΗΣ ΑΓΥΡΙΝΑΙΟΣ*, während es sich vermuthlich um die Namen *ΠΡΟΚΛΟΣ* und *ΑΓΥΡΡΙΟΣ* (oder wahrscheinlicher *ΑΓΥΡΙΣ* (*Ἄγυρις Πρόκλου*, während dort gemeint zu sein scheint *Πρόκλου Ἄγυρις* — PROCVLI auf einer Lampe bei Mommsen Inscr. Neap. 6308, 27 — der Name CELSI mehrfach auf Thonwaaren von diesseits der Alpen Schuermans p. 81, n. 1227 fg.) handelt, was noch sicherer steht, wenn Birch a. a. O. p. 397 mit Recht *ΑΓΥΡΙ* allein als Namen eines Lamp Makers anführt, auch wenn, wie es ganz den Anschein hat, seine vier ersten Namen nichts Anderes sind als zwei Paare jener ersten beiden in umgekehrter Folge. Im Mus. Passer. finden wir I, 24 *ΔΙΟΚΛΗΤ* (was sich doch wohl nicht auf den Kaiser Diocletianus zu beziehen braucht) und 39 die auf einen „Germanicus" bezügliche verstümmelte Inschrift, welche Birch anführt;

II, 15 *ΖΗΤΠΠΣ* (Zetus), 46 *ΔΙΑΣ*. Im Corp. Inscr. IV, werden vier Lampen mit *Λουκίου* angeführt, eine aus Bartoli's Luc., die anderen aus dem Mus. Nani welche aber nicht gleich sicher stehen (LVCI Schuermans p. 154, n. 3049). In derselben Samml. befand sich eine Lampe mit *ΠΡΕΙΜΟΥ* Taf. 342, n. 7 (PRIMI, Schuermans p. 213). Leider haben wir in Betreff der früher Nani'schen Thonlampen t. 340—344, von denen mehrere mit Griech. als mit Latein. Inschriften versehen sind, keine besondere Angaben über die Herkunft. Vermuthlich aber stammen die meisten Stücke nicht aus Italien. Das Mus. Thorv. enthält eine Lampe mit ... IƆIИ (ob NICI, Schuermans p. 189, n. 3870 fg.?), d. Cat. Campana desgleichen eine mit *ΦΟΟΝΓΟΥ*, d. i. *Φθόγγου* (n. 252) womit zusammenzustellen PTONΓVS. TI. CLAUDI CAESARIS. AUG. SER. in O. Jahn's Spec. epigr. B, 6, p. 29. Leider erfahren wir nicht, woher die Lampen mit ABACKANTOY (Abascanti, Fabretti Inscr. p. 509) und *ΓΑΙΟΥ* (Schuermans p. 70, n. 965 fg.) bei Birch p. 397 stammen. Dasselbe gilt von der mit der Inschr. KAT bei Birch p. 398, welche durchaus nicht Griechisch zu sein braucht (vgl. etwa Schuermans p. 77, n. 1144), während *ΣΙΤΤΙΟΥ* bei Birch a. a. O. wohl als der Genitiv des Latein. Namens Siccius, Sittius zu fassen ist, welcher möglicherweise in der Gefässinschrift ASIC OF bei Hübner 4970, 50 enthalten ist. Die Lampeninschrift *ΚΥ* bei Mommsen Inscr. Helv. 350, 16 kommt auch vor bei Janssen Monum. te Leyden p. 110, n. 604, aber auf einer Lampe aus Griechenland, woher vermuthlich auch das Züricher Exemplar stammt. Zu der Lampe in Form eines Stierkopfs, auf dessen Hörnern die Inschrift *ΑΡΘΕΜ ΙΕΡΟΣ* zu lesen ist, Mus. Passer. I, 97, bemerkt der Herausgeber p. 82: Licet autem ea (lucerna) Graeca Inscriptione signata sit', non proinde ex Graecia advectam esse censere debemus; ipsa enim argilla Romanam esse clamat, et Graecos artifices Romae etiam, dum operarentur, graecizasse, nemo est qui nesciat. Letztere Bemerkung genügt aber nicht vollständig. Allem Anschein nach wechselten die Italischen Officinen zwischen Griech. und Röm. Inschriften je nachdem die Exemplare für Gegenden oder einzelne Leute des Griech. oder des Röm. Culturkreises bestimmt waren.

26) Wie es in dieser Beziehung mit den Griechischen unter Römischer Herrschaft stehenden Ländern, abgesehen von Sicilien, zusteht, darüber zu urtheilen, fehlt es

uns noch an dem genügenden Material. Sollte es aber ein reiner Zufall sein, dass Graf Pasch van Krienen, dem in dieser Beziehung Niemand Zuverlässigkeit absprechen wird, in einer Graburne auf Chios eine Lampe di pietra (?) nericcia mit der Inschrift FORTIS fand — welcher Umstand doch wohl nicht gegen das am Schluss der vor. Anm. Gesagte spricht — vgl. Descriz. dell' Arcipelago p. 27 (31 der Ausg. von L. Ross)?

27) Vgl. Fabroni p. 44. Auf einem in Spanien gefundenen Gefässe von rothem Thon wird vermuthlich Fortis C. Titi erwähnt (Hübner 4970, 208), der jedenfalls als in Arezzo lebend zu betrachten ist. Von anderen auf Lampenstempeln häufig vorkommenden Namen gehört z. B. der des Vibianus ohne Zweifel nach Arezzo.

28) Einige besonders ausgezeichnete Stücke dieser Art erwähnt Abeken Mittelitalien S. 363.

29) Unmöglich ist es freilich nicht, dass der Name Vetti, welcher nach Schuermans p. 267, n. 5678 auf einer Lampe des Hrn. de Meester zu Rom vorkommt und sich sonst besonders am Niederrhein findet, auf die off. P. Vetti ad portam Trig. zurückzuführen wäre. — Auf blosse Namen zu bauen ist immerhin misslich. Darf man z. B. aus dem Umstande, dass Ziegel mit dem Stempel CANIDENI ATIMETI und T CANEDENI ATEMETI zu Rom oder in der Umgegend gefunden sind (Fabretti p. 502, 90 u. Müller M. Thorvalds. p. 120, n. 140) schliessen, dass der Lampenmacher Atimetus hier seinen Sitz hatte? Der Name Strobilus lässt sich abgesehen von Lampen und Gefässen aus Thon nur in einer Röm. Steininschrift (Ann. d. Inst. arch. 1856, p. 14, n. 37) und in einer solchen zu Oliva in Spanien (vgl. Hübner n. 3614) nachweisen. Aber es ist eben auch ein Name für einen Freigelassenen oder Sclaven, der hie und da vorgekommen sein kann.

30) Ueber eine interressante Lampe seiner Sammlung hat sich A. Kestner selbst geäussert, vgl. Bullett. d. Inst. arch. 1844, p. 42.

31) D'Agincourt schwankt zwischen der Annahme ob der an der Hinterseite des Geräthes befindliche Stempel den Namen des Verfertigers oder den des dargestellten auriga enthalte. Das würde wohl nicht der Fall gewesen sein, wenn er die Lampenstempel AELMAX (Kenner n. 35 u. 141), AELMAXI (Cat. Campana n. 191), AELI MAXI (Birch II, p. 406), der aller Wahrscheinlichkeit nach auch aus Rom stammt, gekannt hätte.

32) Janssen bemerkt in den Inscr. Mus. L.-B. a. a. O.: Eadem inscriptio legitur in viginti et quod excurrit aliis lucernis, partim ex agro Tunetano, partim ex Italia, e collectione Tulinii, oriundis. Ob alle in Betreff der Punktsetzung gleich sind, lässt sich bezweifeln, ist aber auch nicht für die Deutung von Belang, sondern nur für den auch sonst feststehenden Umstand, dass die Stempel für einen und denselben Namen in Kleinigkeiten wechseln, von Interesse.

33) Einmal, im Cat. Campana n. 81, findet man hinter dem C. OPPI. RES die Zeichen SIS. Dieser Umstand könnte die Meinung Düntzer's (Rh. Jahrb. XXXV, S. 43), der sich Schuermans p. 226, n. 4718 angeschlossen hat, dass wegen jener Zeichen unter ROMANE dieser Name Romanensis zu lesen sei, zu widerlegen scheinen. Der betreffende Name findet sich ausser den beiden bei Sch. angeführten Lampen noch auf zweien im Cat. Campana, vgl. n. 17 al 81 und n. 141, das zweite Mal sicher mit der gleichen Inschrift darunter. Aber wenn es auch nichts Auffallendes haben würde, anzunehmen, dass für das I in dem öfters vorkommenden ROMANI ein E gesetzt wäre, so ist uns doch der Töpfer Romanus nur aus Funden diesseits der Alpen bekannt, und — so viel wir wissen — nicht als Lampenmacher. Dagegen kennen wir — was jenen beiden Gelehrten entgangen ist — den Namen ROMANESIS schon durch Mommsen Inscr. R. Neap. n 6308, 29 als einen, der auf Lampen aus Puteoli gewöhnlich ist. Ich bin fest überzeugt, dass das SIS hinter C. OPPI. RES auf einem Irrthum des Setzers des Campan.-Cat. zurückzuführen ist, der es, anstatt hinter das in derselben Zeile stehende ROMANE, nach RES stellte. Gewiss haben wir auf der betreffenden Lampe den Stempel ganz ebenso ausgeführt zu denken, wie auf der anderen Campana'schen und auf der Merlo'schen.

Fr. Wieseler.

Nachträge. 1, zu S. 211, A. 2. Erst nach dem Abdruck des obigen Aufsatzes kam mir der Catalog der vereinigten Sammlungen zu München, n. I, vom J. 1846, in die Hände, in welchem die Fogelbergschen Terracotten kurz ver-

zeichnet sind. Davon sind Lampen n. 232—295, 300—359, 364—407, 412—416, 429—458 (die letzten dreissig mit Darstellungen aus der Kategorie der sogen. spintriae). Dazu kommen noch drei Formen von oberen Lampentheilen n. 408—410. Inschriften mit Namen, welche sich auf die Verfertiger beziehen, finden sich nur an drei Lampen, an n. 281 CLO·HEL (s. oben, S. 197, Anm. zu n. 8), an n. 264 CCORVRS (der mehrfach auch auf Lampen, die in Italien gefunden sind, erwähnte C. Cornelius Ursus), an n. 242 INDELEO. Diese Inschrift (INGEnui LEO?) ist mir nur noch durch ein Beispiel bekannt, nämlich aus Cat. Campana n. 40.

2, zu S. 221, Anm. 25. Es wäre in mehr als einer Beziehung interessant, wenn meine Lesung *Ἄγυρις Πρόκλου* eine Bestätigung fände durch die von Schuermans p. 38, n. 142 nach Grignon CCXXIII aus Le Châtelet beigebrachte Töpferinschrift *AGIRISPOΓΛY*. Ich sehe aber in der That nicht ein, aus welchem Namen das zweite Wort in Griechischen Buchstaben eher verderbt sein könnte als aus *ΠΡΟΚΛΟΥ*.

F. W.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 7. Mai 1870.

Versuche über die Bewegung der Erde und der Sonne im Aether.

Von

W. Klinkerfues.

Die Erde durcheilt als Begleiterin der Sonne den mit Lichtäther erfüllten unendlichen Weltenraum, ohne merkwürdigerweise in den Aberrationserscheinungen eine Einwirkuug dieser ihrer Bewegung auf die des sie umgebenden Aethers zu verrathen. Darf man nun demgemäss die Annahme wagen, dass der Aether in der nächsten Nachbarschaft der Erde an der Bewegung derselben entweder gar nicht, oder doch wenigstens nicht ganz theilnimmt, so ist die wesentlichste Vorbedingung erfüllt, um die Bewegung der Erde gegen den Aether (und nach einer der leichtesten Reductionen die Bewegung der Sonne im Aether) an irdischem Lichte zu messen. Die Erde ist gleichsam ein Schiff auf hoher See; wie dieses, in Folge des Umstandes, dass sich schon in der Entfernung

von wenigen Fussen ruhendes Wasser befindet, die Schnelligkeit seines Laufes ohne alle entfernteren Anhaltspunkte durch das Log mit überraschender Genauigkeit bestimmt, so wird auch das Fortrücken der Erde im Aether ohne entfernte Zielpunkte, also ohne Sternbeobachtungen, und also auch bei jedem Wetter gemessen werden können. Es kommt zu dem Zwecke darauf an, Eigenschaften der Fortpflanzung des Lichtes oder der Wellenbewegung ausfindig zu machen, welche durch die Bewegung der Erde im Aether eine Modification erfahren. Durch Einfachheit zeichnen sich wohl die folgenden dahin führenden Betrachtungen aus. Wird in dem Strahle einer gegen den Aether ruhenden (oder auch senkrecht zu der Richtung des Strahls bewegten) Lichtquelle ein Absorptions-Spectrum erzeugt, so wird die elective Absorption andere Farben und Wellenlängen treffen, wenn das absorbirende Medium nach der Richtung des Strahles, als wenn es dieser Richtung entgegen bewegt wird, überhaupt wird die Lage der Absorptions-Streifen von der in der Richtung des Strahles genommenen Componente der Geschwindigkeit des absorbirenden Mediums abhängig sein. Nehmen wir z. B. an, dieses Medium fliehe vor dem Strahle mit einer Geschwindigkeit von 4 Meilen in der Secunde oder $\frac{1}{10000}$ der Lichtgeschwindigkeit, so wird die Folge sein, dass, während vorher jedes Molecül des ruhenden Mediums in einer gegebenen Zeit von 10000 Wellen einer bestimmten Farbe durchlaufen wurde, nur noch 9999 Wellen passiren. Wir wissen nun aber bis jetzt nicht anders, als dass die durch ein Medium ausgeübte Absorption von der Anzahl der Wellen

abhängt, welche die Molecüle passiren, oder auch, was auf dasselbe hinausläuft, von der Wellendauer; wir müssen also annehmen, dass bei Bewegung des Mediums die Absorption auf eine andere Farbe übergeht. Es ist noch leicht abzuleiten, dass bei einer vor dem Strahle fliehenden Bewegung die Absorptions-Streifen dem violetten Ende des Spectrums sich nähern werden, bei entgegengesetzter Bewegung dem Roth. Lässt man den Strahl einer irdischen Lichtquelle in einer zu der fortschreitenden Bewegung der Erde senkrechten Richtung das Spalt-Fernrohr eines Spectral-Apparats, und dann ein analysirendes Prisma à vision. directe (also mit Aufhebung der Ablenkung) durchlaufen, so erscheinen die Linien des Flammen-Spectrum, z. B. die Natrium-Linien an denjenigen Stellen, wo sie eine ruhende Lichtquelle erfordert; auch ein Absorptions-Spectrum erscheint in ganz unveränderter Lage, so lange das absorbirende Medium in den directen, weder durch Brechung, noch durch Diffraction, noch durch Spiegelung aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkten Strahl eingeschoben wird. Wenn der Strahl in einer einzigen Richtung, gleichviel sonst, in welcher, verläuft, und keine zwei verschiedene Theile desselben mit verschiedener Richtung zur Erdbewegung vorhanden sind, also die Geschwindigkeiten der Lichtquelle und des absorbirenden Mediums in Beziehung auf den Strahl von gleicher Grösse sind, wird der Abstand des Absorptions-Spectrum derselbe bleiben, wie im Zustande der Ruhe. Ein anderes Ergebniss stellt sich heraus, wenn der Strahl der irdischen Lichtquelle, nachdem er das Spaltfernrohr und das analysirende Prisma durchlaufen, beträchtlich von seinem Wege abgelenkt und in diesem

zweiten Theile eine Absorption bewirkt wird. Es sei, z. B. um an dem einfachsten Falle Alles klar zu machen, der Strahl ursprünglich von Süd nach Nord, also um Mittag nahezu senkrecht zu dem Wege der Erde um die Sonne gerichtet, so wird das Natrium-Spectrum durch die Bewegung der Erde nicht beeinflusst sein, wird nun aber der Strahl durch Spiegelung in die Richtung nach West, d. h. näherungsweise in die Richtung der Erdbewegung gebracht, so wird ein hier eingeschobener Behälter mit Brom-Dämpfen vor dem Strahle fliehen, und die Linien des Brom-Spectrum werden sich nach dem Violett verschieben, ihrer Lage nach also ihren Abstand von den Natrium-Linien vergrössern; die Grösse der Verschiebung kann mit dem Mikrometer des Beobachtungsfernrohrs gemessen werden. Lenkt man den Strahl im Mittag nach Ost ab, so läuft das Brom-Gefäss dem Strahle entgegen, die Linien des Brom näheren sich den Natrium-Linien; ein auf dieser Seite aufgestelltes Beobachtungsfernrohr wird also dieselbe Verschiebung der Brom-Linien, nur mit anderen Vorzeichen ergeben. Um Mitternacht ist die fortschreitende Bewegung der Erde näherungsweise nach Ost gerichtet; die Beobachtungsfernröhre vertauschen demnach ihre Rollen, wenn man den Apparat in seinem Azimuth unverändert lässt. Was die Grösse der zu erwartenden Verschiebung betrifft, wenn die Axen der Beobachtungsfernröhre ganz mit der Richtung einer Bewegung von 4 Meilen in der Secunde zusammenfielen, so würde die Summe der beiden Verschiebungen bei der Vergleichung von Mittag und Mitternacht sehr nahe $\frac{1}{2500}$ der Wellenlänge derjenigen Bromlinien betragen,

welche bei der Einstellung benutzt werden, vorausgesetzt jedoch, dass der Apparat in translatorisch ruhendem Lichtäther aufgestellt ist. Würde ein beträchtlicher Theil des Aethers die Erde begleiten, so würde eine entsprechend geringere Verschiebung zum Vorschein kommen.

Das eben beschriebene Arrangement habe ich nun durch Beobachtungen um Mittag und Mitternacht in einem gegen das Tageslicht gänzlich abgesperrten Raume 40 Tage hindurch, vom 25. März bis 3. Mai d. J., wirklich versucht. Der dazu angewandte, recht mächtige Spectral-Apparat, den ich bei einer anderen Gelegenheit ausführlicher zu beschreiben gedenke, hat ein aus fünf einzelnen Prismen zusammengesetztes analysirendes Prisma von Merz, das in Schärfe der Bilder Vorzügliches leistet; die übrigen Theile, darunter der Spalt, das mit Plan-Parellelgläsern geschlossene Brom-Gefäss, das Prisma für Total-Reflexion, sind von Dr. Meyerstein so ausgeführt worden, dass die Güte des erwähnten Stückes zur vollen Geltung kommen kann. Weil nachher Grössen verbürgt werden müssen, die durch ihre Kleinheit auffallen, so mag hier gleich angeführt werden, dass der wahrscheinliche Fehler einer einzigen Einstellung auf eine Natrium-Linie sich zu $\frac{1}{39}$ des gegenseitigen Abstandes dieser beiden Linien, welche in vielen Spectral-Apparaten nicht einmal getrennt erscheinen, ergeben hat. Dieser wahrscheinliche Fehler entspricht einer Aenderung in der Wellenlänge von

0,0000000153 Millimetern

oder nahe $\frac{1}{38500}$ der Wellenlänge der D-Linie.

Unter der grossen Zahl der Streifen oder schmalen Banden des Brom-Spectrums wählte ich drei, deren mittlere nahe der Wellenlänge 0,0005734 Millimeter entspricht, zu Einstellungen. Da jede Beobachtungen zu Mittag oder zu Mitternacht aus 5 Einstellungen mit dem Mikrometer besteht, so enthält jeder solcher Satz 15 Einstellungen auf das Spectrum des Brom. Hierdurch wird ein Mangel an Schärfe der Begrenzung der Brom-Linien soweit unschädlich gemacht, dass der wahrscheinliche Fehler einer Messung des Abstandes nur einer Aenderung der Wellenlänge von 0,0000000234 Millimetern entspricht.

Es geht aus diesen Daten hervor, dass sich bei dem Apparate solche Grössen, wie sie die Bewegung der Erde nach der Hypothese des vollständig ruhenden Aethers hervorbringen würde, beinahe schon durch die Beobachtung eines Tages verrathen würden, ganz sicher aber durch 40tägige Beobachtungen. Ehe ich das hieraus gezogene Resultat anführe, will ich noch Einiges über das angewandte Licht sagen. Ich bediente mich einer Petroleum-Lampe, in deren Flamme durch den Dochthalter ein Sauerstoff-Strom eingeleitet wurde; dem Petroleum war reichlich Kampher zugesetzt. Das auf solche Weise erzeugte Licht leistete mir erheblich mehr, als das ebenfalls von mir versuchte Drummond'sche Kalklicht, oder Magnesiumlicht. Zu sehr grosser Intensität kommt nämlich hier noch eine bei gleichem Materialverbrauche viel grössere Leuchtfläche; auch ist die Unterhaltung des Lichtes, besonders im Vergleich zu electrischem Licht, wenig umständlich. Nachdem auf den Docht der Lampe etwas essigsaures Natron (eine Verbindung, die sich hier durch leichte

Dampfbildung empfiehlt) gebracht war, trat auch bei sehr enger Spaltstellung, sobald der Hahn des Sauerstoff-Gasometers geöffnet wurde, sogleich das Absorptions-Spectrum des Brom neben dem Flammen-Spectrum des Natrium in grosser Deutlichkeit hervor, so dass das Fadenkreuz des Mikrometer-Apparates von diesem auf jenes geführt werden konnte. Diese unmittelbare Vergleichung beider Spectra an zwei einander diametral entgegenstehenden und controllirenden Beobachtungsfernröhren ist ein Umstand, auf welchen ich grossen Werth lege, weil dadurch die Möglichkeit constanter Fehler fast gänzlich ausgeschlossen wird; die Summe der an beiden Fernröhren von Mittag gegen Mitternacht erhaltenen Verschiebungen scheint in der That von jedem solchen Fehler frei sein zu müssen.

Die 40 tägigen Beobachtungen haben nun eine Verschiebung des Brom-Spectrum gegen das Natrium-Spectrum in dem der fortschreitenden Bewegung der Erde gemässen Sinne, und zwar an beiden Fernröhren ergeben. Als Summe der ihrer absoluten Grösse nach genommenen Verschiebungen erhalte ich im Mittel für den Brom-Streifen der Wellenlänge $0^{mm},0005734$

$$\Delta\lambda = 0^{mm},0000000455$$

mit dem wahrscheinlichen Fehler von $\pm$ 0,0000000074 oder nahe $\frac{1}{6}$ der gefundenen Grösse. Die Wellenlänge der Brom-Linie verändert sich demnach nur um $\frac{1}{12600}$, also bedeutend weniger, als erwartet werden durfte. Von den Erklärungen, die man für den Minderbetrag versuchen könnte, ist mir nach gewissen,

in den Beobachtungen enthaltenen Anzeichen, besonders aber in Rücksicht auf den Umstand, dass die Beobachtungen der ersten 20 Tage fast genau dasselbe Mittel ergeben, als die zweite Hälfte und das Ganze, die aus einer starken Theilnahme des Aethers an der Erdbewegung vorläufig die wahrscheinlichere. Wollte man den Minderbetrag zu einem wesentlichen Theile als den Effect der Bewegung der Sonne im Aether betrachten, wogegen sich in Betreff der Grösse selbst Nichts würde erinnern lassen (besonders da diese Bewegung ja bis dahin ganz unbekannt ist) so würde zu einer anderen Jahreszeit derselbe Effect einen ebenso bedeutenden Mehrbetrag hervorrufen müssen, und es würde nicht leicht eine 40 Tage umfassende Beobachtungsreihe ohne Andeutung eines Ganges oder eine Aenderung der Zahlen bleiben können. Wiederholung der Beobachtungen in verschiedenen Jahreszeiten ist das einzige Mittel, jenen Unterschied aufzuklären.

Zum Schlusse gebe ich noch eine Vergleichung der Anzahl der zwischen gegebenen Grenzen liegenden Fehler mit den Anforderungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, durch welche ich, soweit es die Zahl von 40 Beobachtungen erlaubt, mich überzeugen wollte, ob darin der Zufall annähernd die ihm gebührende Rolle gespielt hat. Die Grenzen sind in $\frac{1}{100}$ Umdrehungen der Schraube gegeben.

Fehler	zw.	0	u.	1.	Nach	d.	Rechn.	11,	nach	d.	Zähl.	15
»	»	1	»	2.	»	»	»	10,	»	»	»	8
»	»	2	»	3.	»	»	»	8,	»	»	»	4
»	»	3	»	4.	»	»	»	5,	»	»	»	6
»	»	4	»	5.	»	»	»	3,	»	»	»	2
»	»	5	»	6.	»	»	»	2,	»	»	»	5.

Diese Zusammenstellung ist der Annahme, dass eine persönliche Disposition auf das Resultat eingewirkt habe, nicht günstig.

Göttingen, den 7. Mai 1870.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

April und Mai.

Nature, a weekly illustrated Journal of Science. Nr. 19–26. 8.

C. Karpf, die Idee Shakespeare's und deren Verwirklichung. Hamburg 1869. 8.

Monatsberichte der königl. Akademie zu Berlin. Januar, Februar 1870.

Extrait des Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Ebd. 1869. 8.

C. Settimanni, d'une nouvelle méthode pour déterminer la Parallaxe du Soleil. Florence 1870. 8.

Preudhomme de Borre, description d'une nouvelle espèce africaine du genre Varan. 8.

The American Ephemeris and Nautical Almanac for the year 1871. Washington 1869. 8.

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Jahrg. V. Hft. 1. (Januar 1870). Leipzig 1870. 8.

Tables to facilitate the reduction of places of the fixed stars. Washington 1869. 8.

Quintino Sella, exposizione finanziaria fatta alla Camera dei deputati. Firenze 1870. 8.

Società Reale di Napoli. Rendiconto delle tornate e dei lavori dell' Accademia di Scienze morali e politiche. Anno ottavo. Nov.—Dec. 1869. Napoli 1869. 8.

A. Quetelet, annales météorologiques de l'Observatoire R. de Bruxelles. Quatrième année. Bruxelles 1870. 4.

(Fortsetzung folgt.)

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

Mai 18. | № 11. | 1870.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber den Isomorphismus des schwefelsaurn Blei's, Baryt's, Strontian's, Kalk's, Kali's, Natron's und Ammoniak's.

Von

Sartorius von Waltershausen.

Es ist zwar längst bekannt, dass Baryt, Cölestin und Bleivitriol untereinander isomorph sind, indess hat man den Anhydrit, Thenardit, Glaserit und Mascagnin mit jenen drei zuerst genannten Mineralkörpern bis jetzt für nicht isomorph gehalten. Auch in Millers Mineralogie ist über dieses Verhältniss nichts erwähnt. Eine etwas genauere Untersuchung zeigt jedoch, dass wenn die Parameter der vier letzgenannten Körper aus andern Flächen abgeleitet werden, als dieses bisjetzt geschehen ist, der Isomorphismus für die ganze Reihe dieser schwefelsaurn Salze hervortritt und dass nur mässige Unterschiede zwischen den Parametern derselben zurückbleiben, welche nicht grösser sind als sie bei andern Reihen trimetrisch oder isoklin krystallisirter Salze, wie z. B. bei der der kohlensaurn Salze von der Form $\dot{R}\ddot{C}$ hervortreten.

Um den Isomorphismus unter den obenerwähnten schwefelsaurn Salzen zu zeigen, stellen wir die angularen Elemente derselben D, E, F, in der nachfolgenden Uebersicht zusammen:

		D	E	F
		011,010	101,001	110 100
Anhydrit	$\dot{Ca}\dddot{S}$	42° 17′	44° 25′	48° 18′
Baryt	$\dot{Ba}\dddot{S}$	31 49,4	52 42	50 50
Cölestin	$\dot{Sr}\dddot{S}$	31 19	52 4	52 1
Anglesit	$\dot{Pb}\dddot{S}$	31 21	52 16	51 49
Thenardit	$\dot{Na}\dddot{S}$	40 41	28 50	64 40,5
Glaserit	$\dot{K}a\dddot{S}$	37 30	36 44	60 12
Mascagnin	$\dot{N}\dot{H}^4\dddot{S}$	37 40	36 10	60 34

Aus diesen Winkeln berechnet man die nachfolgenden Parameter:

		a		b		c
1	Anhydrit	1	:	0,89096	:	0,97985
1	Baryt	1	:	0,81461	:	1,31270
2	Cölestin	1	:	0,78082	:	1,28380
3	Anglesit	1	:	0,78645	:	1,29230
4	Anhydrit	1	:	0,89096	:	0,97985
5	Thenardit	1	:	0.47324	:	0,55052
6	Glaserit	1	:	0,57271	:	0,74628
7	Mascagnin	1	:	0,56424	:	0,73101

Aus diesen Zahlen geht hervor, dass Kalk, Natron, Kali und Ammoniak mit Baryt, Strontian und Blei nur bedingungsweise isomorph sein können, wenn man beim Anhydrit für die von Miller mit 1 1 1 bezeichnete Fläche, die Fläche 8. 9 6, in ähnlicher Weise für Thenardit statt der Fläche 1 1 1 die Fläche 7 4 3 und für Gla-

serit und Mascagnin statt der Fläche 1 1 1 die Fläche 7 5 4 substituirt; es ergeben sich dann für die neu aufgestellte Fläche 1 1 1 folgende Parameter, welche mit denen von Baryt, Cölestin und Anglesit zusammengestellt sind:

	a		b			c	
Baryt	1	:	0,81461	— 0,01569	:	1,31270	— 0,01809
Cölestin	1	:	0,78082	+ 0,01810	:	1,28380	+ 0,01081
Anglesit	1	:	0,78513	+ 0,01379	:	1,28950	+ 0,00511
Anhydrit	1	:	0,79196	+ 0,00696	:	1,30647	— 0,01186
Thenardit	1	:	0,82817	— 0,02925	:	1,28457	+ 0,01004
Glaserit	1	:	0,80179	— 0,00287	:	1,30599	— 0,01138
Mascagnin	1	:	0,78994	+ 0,00898	:	1,27927	+ 0,01534
Mittel	1	:	0,79892		:	1,29461	

Diese Abweichungen, welche bisjetzt in genügender Weise sich nicht erklären lassen, betragen im Mittel noch nicht 2 pro cent. Es wäre wünschenswerth besonders die Krystallformen von Thenardit noch ein Mal nachzumessen, deren Parameter etwas grössere Differenzen als die übrigen zeigen, wir haben jedoch das zu dieser Untersuchung nöthige Material noch nicht erhalten können.

Ueber einen einfachen Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes und einige damit zusammenhängende Sätze.

Von

M. A. Stern.

Der folgende Beweis hat in seinem Ausgangspunkte Aehnlichkeit mit dem dritten Gaussischen Beweise, ist aber in seiner weiteren Entwickelung einfacher und scheint mir überhaupt unter

den bis jetzt bekannten Beweisen der elementarste zu sein.

Seyen p und q zwei Primzahlen und bezeichne $\frac{xq}{p}$ das System der kleinsten positiven Reste, welche man erhält, wenn man statt x allmälich die Zahlen $1, 2 \ldots \frac{p-1}{2}$ setzt, ebenso bezeichne $\frac{yp}{q}$ das System der kleinsten positiven Reste, welche man erhält, wenn man allmälig statt y die Zahlen $1, 2 \ldots \frac{q-1}{2}$ setzt. Ist u die Anzahl der ungeraden Zahlen, welche unter den Zahlen $1, 2 \ldots \frac{p-1}{2}$ vorkommen, so ist

$$1.2. \ldots \frac{p-1}{2} \equiv (-1)^u 2.4 \ldots (p-1) \pmod{p}$$

ferner ist

$$q.2q \ldots \frac{p-1}{2} q = q^{\frac{p-1}{2}} . 1.2 \ldots \frac{p-1}{2}$$

Ist nun u' die Anzahl der ungeraden Zahlen, welche in dem Restsysteme $\frac{xq}{p}$ vorkommen, so ist auch

$$q \cdot 2q \ldots \frac{p-1}{2} q \equiv (-1)^{u_1} . 2.4 \ldots (p-1) \pmod{p}$$

$$\text{also } q^{\frac{p-1}{2}} . 1.2 \ldots \frac{p-1}{2} \equiv (-1)^{u_1} . 2.4 \ldots p-1$$

$$\equiv q^{\frac{p-1}{2}} (-1)^u 2.4 \ldots (p-1)$$

$$\text{und } q^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{u_1 - u} \quad (\text{mod. } p)$$

Ist $q = 2$ so ist $u_1 = o$ mithin $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^u$, nun ist u gerade oder ungerade je nachdem $p = 8n \pm 1$ oder $p = 8n \pm 3$ wodurch der quadratische Charakter der Zahl 2 bestimmt ist.

Sey nun q wie p eine ungerade Primzahl und es bezeichne v die Anzahl der ungeraden Zahlen, welche unter den Zahlen $1, 2 \ldots \frac{q-1}{2}$ vorkommen und v^1 die Anzahl der ungeraden Zahlen in dem Restsysteme $\frac{yp}{q}$ so findet man wieder

$$p^{\frac{q-1}{2}} \equiv (-1)^{v_1 - v} \quad (\text{mod. } q)$$

Nach der bekannten Bezeichnung hat man also

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{u_1 + v_1 - u - v}$$

und es ist daher nur zu beweisen, dass nach dem Modul 2 die Congruenz $u_1 + v_1 - u - v \equiv o$ oder $u_1 + v_1 - u - v \equiv 1$ statt hat, je nachdem von den Zahlen p und q eine oder keine in der Form $4n + 1$ enthalten ist. Da sich alle folgenden Congruenzen auf den Modul 2 beziehen, so werde ich diesen nicht mehr besonders erwähnen.

Bemerkt man dass $u + v = \frac{p-1}{4} + \frac{q-1}{4}$

oder $= \frac{p+q}{4}$ oder $= \frac{p+1}{4} + \frac{q+1}{4}$ je nachdem p und q entweder beide von der Form $4n+1$, oder nur eine oder keine von dieser Form ist, so sieht man, dass der zu beweisende Satz darauf zurück kommt zu zeigen, dass $u_1 + v_1 \equiv \frac{p-1}{4} + \frac{q-1}{4}$ oder $\equiv \frac{p+q}{4}$ je nachdem p und q gleichförmig (d. h. beide von der Form $4n+1$ oder beide von der Form $4n+3$) oder ungleichförmig sind. Dies lässt sich noch in einer anderen Weise ausdrücken. Da nemlich das Restsystem $\frac{xq}{p}$ aus $\frac{p-1}{2}$ Resten und das Restsystem $\frac{yp}{q}$ aus $\frac{q-1}{2}$ Resten besteht, so sagt der zu beweisende Satz, dass wenn man die Anzahl der geraden Reste, die in beiden Systemen zusammengenommen vorkommen, durch G und die Anzahl der ungeraden Reste in beiden Systemen (d. h. $u^1 + v^1$) durch U bezeichnet, alsdann $U - G \equiv o$ oder $U - G \equiv 1$ je nachdem p und q gleichförmig oder ungleichförmig sind. In dieser Gestalt kann der Satz leicht, wie folgt, bewiesen werden.

In den beiden Restsystemen $\frac{xq}{p}$ und $\frac{yp}{q}$ kann nicht ein und dieselbe Zahl r vorkommen. Hätte man nämlich $aq = gp + r$ wo $a < \frac{p}{2}$ und zugleich $a'p = g'q + r$ wo $a' < \frac{q}{2}$ und mithin $g' < \frac{p}{2}$ so hätte man $(a + g')q = (a' + g)p$, es

müsste also $a+g'$ durch p theilbar sein, während $a+g'<p$.

Es soll nun in allem Folgenden vorausgesetzt werden, dass von den Zahlen p und q die letztere die kleinere ist. Hat man die Gleichung $a'p=g'q+r$ wo $a'<\frac{q}{2}$ und also r eine in dem Restsysteme $\frac{yp}{q}$ enthaltene Zahl ist, so folgt daraus $(g'+1)\,q=a'p+q-r$. Nun ist a' höchstens $\frac{q-1}{2}$ also kann g' höchstens $\frac{p-3}{2}$ seyn, wäre nemlich $a' \overset{=}{<} \frac{q-1}{2}$ und zugleich $g' = \frac{p-1}{2}$ so wäre $a'p-g'q$ negativ und könnte mithin nicht $=r$ seyn. Demnach ist $g'+1<\frac{p}{2}$ und mithin $q-r$ eine der Zahlen, welche in dem Restsysteme $\frac{xq}{p}$ vorkommen. Jedem Reste r in dem Systeme $\frac{yp}{q}$ (welcher, wie sich von selbst versteht, kleiner als q ist) entspricht also ein Rest $r'=q-r$ in dem Restsysteme $\frac{xq}{p}$ welcher ebenfalls $<q$, und zwar entspricht einem geraden Reste r ein ungerader r' und umgekehrt. Ist m die Anzahl der geraden und n die Anzahl der ungeraden Reste, welche in dem Restsysteme $\frac{yp}{q}$ vorkommen, so kommen, ihnen entsprechend, in dem Restsysteme $\frac{xq}{p}$ mithin n gerade und m

ungerade Reste vor, welche sämmtlich $< q$ sind. Da nun $m + n = \frac{q-1}{2}$ so kommen mithin in beiden Restsystemen zusammengenommen $\frac{q-1}{2}$ gerade und $\frac{q-1}{2}$ ungerade verschiedene Reste vor, welche $< q$, d. h. beide Restsysteme zusammengenommen enthalten sämmtliche $q - 1$ Zahlen, welche kleiner als q sind, und jedes enthält die Hälfte. Unter den $\frac{p-1}{2}$ Zahlen, welche in dem Restsysteme $\frac{xq}{p}$ vorkommen, sind also noch $\frac{p-q}{2}$ Reste enthalten, welche $\overline{\gtrless} q$ sind. Sind unter diesen $\frac{p-q}{2}$ Resten G' gerade und U' ungerade, so ist mithin $G' + U' = \frac{p-q}{2}$ d. h. $G' + U'$ $\equiv 0$ oder $\equiv 1$ je nachdem p und q gleichförmig oder ungleichförmig sind. Unter denselben Voraussetzungen ist mithin auch $U' - G' \equiv 0$ oder $\equiv 1$ und da $G = \frac{q-1}{2} + G'$ und $U = \frac{q-1}{2} + U'$ auch $U - G \equiv 0$ oder $\equiv 1$.

Das Vorhergehende ist zum Beweise des Reciprocitätsgesetzes ausreichend. Man kann aber noch einen Schritt weiter gehen, indem man zeigt, dass die hier bewiesenen Congruenzen sich in Gleichungen verwandeln lassen.

Man kann nemlich folgenden Satz beweisen:

In dem Restsysteme $\frac{xq}{p}$ kommen eben so viel

gerade als ungerade Zahlen vor, welche $\overline{\gtrless} q$, wenn p und q gleichförmig sind, sind dagegen p und q ungleichförmig so übertrifft die Anzahl der ungeraden Zahlen die der geraden um eine Einheit, also in den früher gebrauchten Zeichen heisst dies: es ist $U' - G' = 0$ oder $= 1$ je nachdem p und q gleichförmig oder ungleichförmig sind.

Um dies zu beweisen, bemerke man zunächst Folgendes. Man bezeichne durch $\frac{\xi q}{p}$ das System der kleinsten positiven Reste, welche man erhält, indem man für ξ allmälich alle Werthe von $\frac{p+1}{2}$ bis $p-1$ setzt. Die beiden Systeme $\frac{xq}{p}$ und $\frac{\xi q}{q}$ enthalten also zusammengenommen die Zahlen $1, 2, \ldots p-1$ und jedes System enthält $\frac{p-1}{2}$ Zahlen.

Nun können aber in den Systemen $\frac{xq}{p}$ nicht zwei Zahlen vorkommen, die sich zu p ergänzen. Hat man nemlich die zwei Gleichungen $xq = gp + r$ und $x'q = g'p + r'$ und zugleich $r + r' = p$ so muss $x + x'$ durch p theilbar seyn also $x' > \frac{p}{2}$ wenn $x < \frac{p}{2}$. Es müssen sich also die Zahlen aus dem Systeme $\frac{xq}{p}$ einzeln mit den Zahlen aus dem Systeme $\frac{\xi q}{p}$ zu p ergänzen, d. h. das System

$\frac{xq}{p}$ enthält eben so viel gerade Zahlen als das System $\frac{\xi q}{p}$ ungerade und umgekehrt.

Sey nun $k \overline{\overline{<}} \frac{p-1}{2}$ und $kq = sp + r$ ferner $(k + \frac{p-1}{2})\, q = s'p + r'$ so dass also $s' > s$. Hieraus folgt $\frac{p-1}{2}\, q = (s'-s)p + r' - r = \frac{q-1}{2}\, p + \frac{p-q}{2}$. Ist also $r' > r$ so ist $r' - r = \frac{p-q}{2}$, ist dagegen $r' < r$ so schreibe man die vorhergehende Gleichung in der Form $\frac{q+1}{2}\, p - \frac{p+q}{2} = (s'-s)\, p - (r - r')$, in diesem Falle ist mithin $r - r' = \frac{p+q}{2}$.

Sind p und q gleichförmig, so ist $\frac{p-q}{2}$ eine gerade, $\frac{p+q}{2}$ eine ungerade Zahl. Nennt man zur Abkürzung zwei Zahlen, die beide gerade oder beide ungerade sind, gleichartige, zwei Zahlen von denen die eine gerade, die andere ungerade ist, ungleichartige, so müssen r und r' gleichartig oder ungleichartig seyn, je nachdem $r' > r$ oder $r' < r$ ist. Bezeichnet also Γ die Anzahl der geraden r und Ω die Anzahl der ungeraden r in der Reihe $\frac{xq}{p}$ welche kleiner als die entsprechenden r' in der Reihe $\frac{\xi q}{p}$ sind,

und Γ' und Ω' bezüglich die Anzahl dieser geraden und ungeraden r' so ist $\Gamma = \Gamma'$ und $\Omega = \Omega'$. Nimmt man diese Γ und Ω Reste aus der Reihe $\frac{xq}{p}$ heraus, so bleiben noch die Reste r welche grösser als die ihnen entsprechenden r' sind; die Anzahl dieser geraden und ungeraden Reste r sey bezüglich γ und ω, die Anzahl der entsprechenden geraden und ungeraden r' sey bezüglich γ' und ω', dann ist $\gamma = \omega'$ und $\omega = \gamma'$.

In dem Restsysteme $\frac{xq}{p}$ finden sich also $\Gamma + \gamma$ gerade und $\Omega + \omega$ ungerade Zahlen, in dem Restsysteme $\frac{\xi q}{p}$ dagegen $\Gamma + \omega$ gerade und $\gamma + \Omega$ ungerade. Nun entsprechen aber auch den $\Gamma + \omega$ geraden unter den Resten $\frac{\xi q}{p}$ ebensoviel ungerade unter den Resten $\frac{xq}{p}$ und den $\gamma + \Omega$ ungeraden unter den Resten $\frac{\xi q}{p}$ ebensoviel gerade unter den Resten $\frac{xq}{p}$, mithin ist $\Gamma + \gamma = \gamma + \Omega$ oder $\Gamma = \Omega$.

Sind p und q ungleichförmig, so ist $\frac{p-q}{2}$ ungerade und $\frac{p+q}{2}$ gerade. Mit Beibehaltung der vorhergehenden Bezeichnung entsprechen also, wenn $r' > r$, den Γ geraden Resten r nun Γ ungerade Reste r' und Ω gerade Reste r' den Ω ungeraden Resten r. Ferner, wenn $r' < r$, gehören zu den γ geraden Resten r auch γ gerade Reste r' und ω ungerade Reste r' zu den ω un-

geraden Resten r. Hat man also in dem Systeme $\frac{xq}{p}$ demnach $\Gamma + \gamma$ gerade und $\Omega + \omega$ ungerade, in dem Systeme $\frac{\xi q}{p}$ aber $\gamma + \Omega$ gerade und $\Gamma + \omega$ ungerade, so müssen sich unter dem Restsysteme $\frac{xq}{p}$ auch $\gamma + \Omega$ ungerade und $\Gamma + \omega$ gerade finden, woraus $\gamma = \omega$ folgt.

Man nehme nun aus dem Restsysteme $\frac{xq}{p}$ diejenigen Zahlen r heraus welche $\overline{\overline{>}}\, q$ sind, hier werden zwei Fälle zu unterscheiden seyn, je nachdem $r + \frac{p-q}{2}$ kleiner oder grösser als p ist. Der dritte Fall dass nemlich $r + \frac{p-q}{2} = p$ kann nicht vorkommen, da dann $r = \frac{p+q}{2}$ seyn müsste, während der Rest $\frac{p+q}{2}$ zu dem Systeme $\frac{\xi q}{p}$ gehört und zwar zu $\xi = \frac{p+1}{2}$. Im ersten Falle giebt es eine Zahl $r' < p$, so dass $r + \frac{p-q}{2} = r'$ also da $r \overline{\overline{>}}\, q$ so ist $r' \overline{\overline{>}}\, \frac{p+q}{2}$ und da $r' > r$ umsomehr $r' > q$. Ist r der Rest welcher zu $\frac{kq}{p}$ gehört, so gehört r' zu $\frac{(k + \frac{p-1}{2})q}{p}$. Ist

dagegen $r+\frac{p-q}{2}>p$ also $r>\frac{p+q}{2}$ so setze man $r=\frac{p+q}{2}+\alpha$ und $\varrho=q+\alpha$ alsdann ist $r-\varrho=\frac{p-q}{2}$. Ist r der Rest, welcher zu $\frac{kq}{p}$ gehört, so ist ϱ der Rest, welcher zu $\frac{(k+\frac{p+1}{2})q}{p}$ gehört und zugleich $\varrho>q$.

Sind nun p und q gleichförmig, so müssen, wegen der Gleichungen $r'-r=\frac{p-q}{2}$ und $r-\varrho=\frac{p-q}{2}$ sowohl r und r' als ϱ und r gleichartig seyn. Es giebt also in dem Restsysteme $\frac{xq}{p}$ ebensoviel gerade und ebensoviel ungerade Zahlen, welche $>q$ als in dem Restsysteme $\frac{\xi q}{p}$. Nun giebt es in beiden Restsystemen zusammen genommen d. h. unter den Zahlen $1, 2, \ldots p-1$ überhaupt $p-q$ Zahlen, welche $\overline{\overline{>}}\ q$ sind und zwar $\frac{p-q}{2}$ gerade und $\frac{p-q}{2}$ ungerade, in dem Restsysteme $\frac{xq}{p}$ sowie in dem Restsysteme $\frac{\xi q}{p}$ sind demnach $\frac{p-q}{4}$ gerade und $\frac{p-q}{4}$ ungerade enthalten, d. h. also: wenn p und q gleichförmig sind, so ist $U'=G'$ womit der erste Theil des Satzes bewiesen ist.

Sind p und q ungleichförmig, so müssen

und r' und ebenso r und ϱ ungleichartig seyn; es giebt also in dem Restsysteme $\frac{xq}{p}$ soviel gerade und ungerade Zahlen, welche $> q$ sind, als es in dem Systeme $\frac{\xi q}{p}$ bezüglich ungerade oder gerade giebt, welche $> q$ sind. Bezeichnet man daher durch g' und u' bezüglich die Anzahl der geraden und der ungeraden Reste in dem Systeme $\frac{\xi q}{p}$ welche $> q$ sind, so hat man $G' = u'$ und $U' = g'$.

Nun ist aber noch Folgendes zu bemerken. Ist $(\frac{p+1}{2} - k)q = ps + r$ und $(\frac{p+1}{2} + k)q = ps' + r'$, so dass r und r' beide $< p$, so ist $(p+1)q = p(s+s') + r + r'$. Ist nun $r + r' < p$ so muss $r + r' = q$ seyn, ist dagegen $r + r' > q$ so muss $r + r' = p + q$ seyn. Für k kann man alle Werthe setzen von $k = 1$ bis $k = \frac{p-1}{2}$ und erhält hierdurch für r alle einzelnen in $\frac{xq}{p}$ enthaltenen Zahlen; zu jeder dieser Zahlen gehört eine entsprechende Zahl r' aus der Reihe $\frac{\xi q}{p}$, ausgenommen wenn $k = \frac{p-1}{2}$ da dann $(\frac{p+1}{2} - k)\,q = q$ d. h. $r = q$ welcher Rest in dem Systeme $\frac{xq}{p}$ zu $x = 1$ gehört, während, $(\frac{p+1}{2} + k)q = pq$ ist, also $r' = 0$. Andererseits lässt sich dem Wer-

the $r' = \frac{p+q}{2}$ aus der Reihe $\frac{\xi q}{p}$ kein Werth aus der Reihe $\frac{xq}{p}$ zuordnen, da in diesem Falle $k = 0$ seyn muss. Nimmt man daher q aus dem Systeme $\frac{xq}{p}$ und $\frac{p+q}{2}$ aus dem Systeme $\frac{\xi q}{p}$ heraus, so lassen sich die übrigen Zahlen aus diesen beiden Systemen immer paarweise, nemlich aus jedem Systeme je eine, so zusammenstellen, dass ihre Summe $= q$ oder $= p + q$ ist, und zwar so, dass die Zahlen, welche einzeln $< q$ sind, paarweise zusammengestellt die Summe q geben, dagegen die Zahlen, welche einzeln $> q$ sind, zusammengestellt die Summe $p + q$ geben. Bei jedem dieser letzteren Paare müssen offenbar die beiden zusammengestellten Zahlen zugleich gerade oder ungerade seyn, da $p + q$ gerade ist. Hieraus folgt also, dass abgesehen von den Resten q und $\frac{p+q}{2}$ sich in den beiden Systemen $\frac{xq}{p}$ und $\frac{\xi q}{p}$ gleichviel gerade und gleichviel ungerade Zahlen finden, die grösser als q sind. Fügt man nun einerseits in dem Systeme xq den Rest q wieder hinzu und andererseits den Rest $\frac{p+q}{2}$ in dem Systeme $\frac{\xi q}{p}$ so folgt dass in dem Systeme $\frac{xq}{p}$ die Anzahl der ungeraden Zahlen, welche $\overline{\overline{>}}\, q$ um eine Einheit grösser ist, als die Anzahl der ungeraden Zahlen $> q$ in dem Systeme $\frac{\xi q}{p}$ während in dem letzteren Sy-

steme eine gerade mehr vorkommt, welche $>q$ ist, als in dem Systeme $\frac{xq}{p}$. Mit Beibehaltung der früheren Bezeichnung heisst dies:

$$U' = u' + 1; \quad G' = g' - 1$$

nun wurde früher gefunden

$$U' = g'; \quad G' = u'$$

also $U' - G' = 1$, womit auch der zweite Theil des Satzes bewiesen ist.

Hieraus folgt dann unmittelbar dass, je nachdem p und q gleichförmig oder ungleichförmig sind, auch $U - G = 0$ oder $= 1$. Ferner da $U + G = \frac{p-1}{2} + \frac{q-1}{2}$ so ist $U = u' + v' = \frac{p-1}{4} + \frac{q-1}{4}$ oder $\frac{p+q}{4}$ woraus dann weiter folgt, dass $u + v - u' - v' = 0$ oder $= 1$ je nachdem eine oder keine der Zahlen p und q in der Form $4n + 1$ enthalten ist und dass $u + v - G = 0$ oder $= 1$ je nachdem p und q beide von der Form $4n + 1$ sind oder nicht.

Ich schliesse hieran noch folgende Bemerkungen. Sey $k + k' = \frac{p+1}{2}$ und $kq = sp + r$; $k'q = s'p + r'$ so ist $r + r' = \frac{p+q}{2}$ oder $= p + \frac{p+q}{2}$. Denn es ist $(k + k')\,q = \frac{p+1}{2}q = (s + s')p + r + r'$ $= \frac{q-1}{2}p + \frac{p+q}{2}$ also wenn $r + r' < p$ so ist $r + r' = \frac{p+q}{2}$, ist dagegen $r + r' > p$ so ist $r + r'$ $= p + \frac{p+q}{2}$. Indem man also in dem Systeme

$\frac{xq}{p}$ allmälich $x = k = 1$ und dann $x = k' = \frac{p-1}{2}$ setzt, ferner $x = k = 2$ und dann $x = k' = \frac{p-3}{2}$ u. s. w. so sieht man, dass man sämmtliche in diesem Systeme enthaltenen Reste paarweise so zusammenstellen kann, dass ihre Summe $\frac{p+q}{2}$ oder $p + \frac{p+q}{2}$ ist, und zwar, wenn $p = 4n + 1$ so werden sich sämmtliche $2n$ in diesem Systeme enthaltenen Reste in dieser Weise zusammenstellen lassen, ist dagegen $p = 4 + 3$ so bleibt ein Mittelglied übrig, welches zu $k = \frac{p+1}{4}$ gehört und sich daher mit keinem anderen zusammen stellen lässt. Dieses Mittelglied ist $= \frac{3p+q}{4}$ wenn $q = 4m + 3$ und $\frac{p+q}{4}$ wenn $q = 4m + 1$.

Ist r kleiner als $\frac{p+q}{2}$ so muss auch $r' < \frac{p+q}{2}$ und $r + r' = \frac{p+q}{2}$ seyn, da sonst $r' > p$ wäre. Sind also p und q beide von der Form $4n + 1$, so dass kein Mittelglied vorhanden ist, so ist $\frac{p+q}{2}$ ungerade, unter den Zahlen des Systems $\frac{xq}{p}$, welche $< \frac{p+q}{2}$ sind, giebt es also ebenso viel gerade als ungerade. Da ferner $p + \frac{p+q}{2}$ eine gerade Zahl ist, so müssen sowohl die geraden als die ungeraden Zahlen dieses Systems,

welche $>\frac{p+q}{2}$ sind, in gerader Zahl vorkommen.

Sind q und q beide von der Form $4n+3$ so giebt es wieder unter den Zahlen welche $<\frac{p+q}{2}$ ebensoviel gerade als ungerade, da das Mittelglied $>\frac{p+q}{2}$. Ist $p=4n+1$ und $q=4m+3$ so ist $\frac{p+q}{2}$ gerade und $p+\frac{p+q}{2}$ ungerade, es kommen sowohl die geraden als die ungeraden Zahlen des Restsystems, welche $<\frac{p+q}{2}$, paarweise vor, dagegen sind unter den Zahlen, welche $>\frac{p+q}{2}$ sind, ebensoviel gerade als ungerade. Ist dagegen $p=4m+3$ und $q=4n+1$ so gehört das nun vorhandene Mittelglied $\frac{p+q}{4}$ zu den Zahlen, welche $<\frac{p+q}{2}$, unter den Zahlen, die $>\frac{p+q}{2}$ sind, werden also wieder soviel gerade als ungerade seyn.

Fasst man dies zusammen so kann man mithin sagen: je nachdem p und q gleichförmig oder ungleichförmig sind, giebt es unter den Zahlen des Restsystems $\frac{xq}{p}$, welche $<\frac{p+q}{2}$ oder $>\frac{p+q}{2}$, ebensoviel gerade als ungerade. Wenn daher oben gefunden wurde, dass, falls p und q ungleichfömig, unter den Zahlen die $\overline{\overline{>}}\, q$ eine ungerade Zahl mehr vorkommt, so kann man diesen Satz dahin modificiren, dass unter den Zahlen, die $\overline{\overline{>}}\, q$ und $<\frac{p+q}{2}$, eine ungerade

mehr vorkommt, während unter den Zahlen die $> \frac{p+q}{2}$ gleichviel gerade und ungerade vorkommen.

Ueber gewisse Probleme aus der Theorie der Oberflächen.

Von

A. Clebsch.

Die Oberflächen 3., 4., 5. O., deren Abbildung auf einer Ebene ich in einer Reihe von Aufsätzen behandelt habe, lassen sich in zwei Theile sondern; in solche deren Abbildung ohne Weiteres, und zwar im Wesentlichen nur auf eine Art, gelingt; und in solche, bei denen eine höhere Gleichung zu lösen ist, welche dann eine grössere Anzahl gleichberechtigter Abbildungen liefert. Die Gleichungen, welche man hiebei erhielt., hatten immer besondere Eigenschaften, und gaben bemerkenswerthe Beispiele für die Theorie der algebraischen Gleichungen.

Ich habe nun gefunden, dass alle jene Gleichungen nichts anderes sind, als besondere Fälle der Gleichungen, auf welche die Zweitheilung der Abelschen Functionen führt. Es zeigt sich nämlich, dass alle jene Flächen, bei denen die Abbildung mit Hülfe einer höhern Gleichung geleistet werden konnte, auf einer Doppelebene ohne Weiteres, und im Wesentlichen nur auf eine Art, abgebildet werden können. Ein Beispiel dafür bildet unter anderen die Fläche 5. O., deren Behandlung ich vor nicht langer Zeit der kgl. Gesellschaft vorzulegen mir erlaubte.

Indem man unter diesem Gesichtspuncte jene Probleme zusammenfasst, ergiebt sich eine neue und interessante Aufgabe, welches darin

besteht, eine Doppelebene, deren Blätter längs einer Uebergangscurve von gegebener Natur zusammenhängen, sofern es möglich ist, auf einer einfachen Ebene abzubilden. Dieses Problem führt nun, wie ich gefunden habe, immer auf eine Gleichung vom Grade ma, wo m irgend eine ganze Zahl, a aber den Grad eines irreducibeln Factors einer Zweitheilungsgleichung für die der Uebergangscurve zugeordneten Abelschen Functionen bedeutet. Und zwar besteht die Auflösung der Gleichung vom Grade ma in der Auflösung der Theilungsgleichung selbst, resp. des irreducibeln Factors, und in der Auflösung von Gleichungen $m$ten Grades. Die ma verschiedener Abbildungsarten bilden a Gruppen zu m.

Wenn man die Doppelebene nur als Durchgang für die Abbildung einer Fläche betrachtet, so können allerdings diese ma an uud für sich gleichberechtigten Abbildungsarten in verschiedene getrennte Classen zerfallen. Denn es können unter den geometrischen Gebilden, welche in der Doppelebene den Lösungen des Zweitheilungsproblems zugeordnet sind, einige zu der Fläche in besondere Beziehungen treten. In diesem Falle können die Abbildungen verschiedener Gruppen selbst insofern verschiedenen Werth besitzen, als die dabei auftretenden Abbildungsfunctionen verschiedene Ordnungen erhalten.

Der einfachste Fall einer Doppelebene ist der, wo die Uebergangscurve, welche stets von gerader Ordnung sein muss, ein Kegelschnitt ist. Die Abbildung auf einer einfachen Ebene wird dann folgendermassen bewerkstelligt. In einem Blatte der Doppelebene nimmt man einen beliebigen Punct A an, und legt durch ihn die Doppelschaar von Kegelschnitten, welche den

gegebenen in 2 Puncten berühren; diese Kegelschnitte bilden sich als Gerade der einfachen Ebene ab. Dem Schnittpunct zweier Geraden der letztern entspricht unter den drei übrig gebliebenen Schnittpuncten der Kegelschnitte derjenige, welcher auf der Verbindungslinie von A mit dem Durchschnitte der Berührungssehnen beider Kegelschnitte liegt. Auf diese Aufgabe führt z. B. die Abbildung einer Fläche zweiter Ordnung.

Von viel grösserer Wichtigkeit und grösserem Interesse ist die Betrachtung einer Doppelebene, deren Uebergangscurve eine allgemeine Curve 4. O. ist. In diesem Falle führt die Abbildung auf einer einfachen Ebene zunächst auf einen irreducibeln Factor einer Zweitheilungsgleichung, welcher vom 36. Grade ist; er entspricht den 36 Arten, welche Hr. Hesse angegeben hat, die Gleichung der Curve 4. O. als symmetrische Determinante darzustellen, oder den 36 Schaaren von Berührungscurven 3. O., deren Berührungspuncte niemals auf einem Kegelschnitte liegen. In jedem solchen System von Curven giebt es acht Systeme mit Doppelpunct; so dass in jedem Puncte der Ebene 8 dieser Curven einen Doppelpunct haben. Diese 8 Systeme entsprechen bei dem Hesseschen Zusammenhange der Curven 4. O. mit einem Flächenbündel 2. O. den 8 Grundpuncten des Bündels. Jede dieser 36 . 8 = 288 Schaaren von Berührungscurven mit Doppelpunct lässt sich als System von Geraden einer Ebene abbilden, und es giebt demnach 288 gleichberechtigte Arten diese Abbildung auszuführen, oder doppelt so viel, wenn man diejenigen Abbildungen unterscheidet, welche durch Vertauschung der beiden Blätter der Doppelebene aus einander hervorgehen. Diese Abbildungen sind den 288 Systemen von 7 Doppeltangenten zugeordnet, von denen nicht

3 ihre Berührungspuncte auf einem Kegelschnitt haben. Den geraden Linien der Doppelebene entsprechen Curven 3. O. in der einfachen; sie haben 7 feste Puncte, welche die Bilder jener Doppeltangenten sind.

Auf diese Doppelebene führen die Flächen dritter Ordnung und die Flächen 4. O. mit einer Doppelcurve 3. Grades, und man wird hierbei auf die Resultate, welche Hr. Camille Jordan und Hr. Geiser bezüglich des Zusammenhangs dieser Flächen abgeleitet haben, zurückgeführt.

Bei den Flächen 3. O. ist eine Doppeltangente der zugehörigen Doppelebene ausgezeichnet, indem sie in einem Blatte das Bild des Puncts der Fläche ist, von welchem aus man sie auf die Doppelebene projicirt. Von den 2. 288 Abbildungen haben diejenigen 72 den einfachsten Character, bei welchen diese ausgezeichnete Doppeltangente und zwar aus dem Blatt genommen, wo sie den Projectionspunct darstellt, ein Fundamentalpunct wird.

Bei den Flächen 4. O. mit einer Doppelcurve 2. Grades projicirt sich von einem Puncte dieser Curve aus die Fläche als Doppelebene mit einer Uebergangscurve 4. Grades. Der Projectionspunct selbst bildet sich durch zwei ihrer Doppeltangenten (jedesmal in einem Blatte) ab, welche demnach eine ausgezeichnete Stellung einnehmen; 10 andre Doppeltangenten entsprechen Kegelschnitten, deren Ebenen durch den Projectionspunct gehen und zugleich einen der 5 doppelt berührenden Kegel tangiren, welche die Fläche zulässt. Die 16 übrigen Doppeltangenten entsprechen (immer in einem Blatt) den 16 Geraden der Fläche. Die einfachsten Abbildungen der Fläche werden die 40, bei denen als Fundamentalpuncte die beiden zu *P* gehörigen Doppeltangenten auftreten, und zwar immer

dem Blatte entnommen, in welchem sie den Projectionspunct darstellen.

Ich übergehe hier dasjenige, was sich auf die Flächen 4. O. mit einer Doppelgeraden bezieht. Dieses so wie die ausführliche Darlegung der auseinandergesetzten Verhältnisse gedenke ich an einem anderen Orte zu geben.

Ich füge noch wenige Worte hinzu, um durch eine Analogie die Natur des vorliegenden Problems deutlicher hervortreten zu lassen. Die Doppelebene, welche Riemann bei dem Studium derhyperelliptischen Functionen angewandt hat, enthält nur reelle Puncte; sie kann daher, als Gebilde von 2 Dimensionen, nur in Puncten zusammenhängen. Der Transformation derselben auf eine einfache Ebene entspricht, sofern sie möglich ist, die Zurückführung einer Quadratwurzel durch rationale Substitutionen auf einen rationalen Ausdruck.

In dem vorliegenden Falle handelt es sich um ein analoges Problem von grösserer Schwierigkeit. Die hier angewandte Doppelebene enthält Puncte mit complexen Coordinaten, ist also ein Gebilde mit, wenn man will, 4 reellen Dimensionen. Die Blätter können daher durch ein Gebilde von 4 — 2 = 2 Dimensionen, eine Curve, zusammenhängen, und die Uebergangscurve ist es, welche bei dieser Erweiterung die Stelle der Riemannschen Windungspuncte vertritt.

Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Elasticitätscoefficienten einiger Metalle.

Von

F. Kohlrausch.

Die nächste Veranlassung zu dieser Unter-

suchung, die ich mit Herrn Dr. Loomis gemeinschaftlich angestellt habe, bildete das praktische Bedürfniss, bei einer experimentellen Arbeit, in welcher die Elasticität zum Messen gebraucht wurde, den Einfluss der Temperatur in Rechnung ziehen zu können. Aus den Beobachtungen von Wertheim (Pogg. Ann. Erg. Bd. 2. S. 18), welche in die meisten Lehrbücher übergegangen sind, folgt das überraschende Resultat, dass die Elasticität einiger Metalle, insbesondere z. B. diejenige des Eisens, mit steigender Temperatur anfangs zunehme, und erst in höheren Temperaturen wieder abnehme. Dieses sonderbare Verhalten erregte in mir einige Zweifel und gab die zweite Veranlassung, die von verschiedenen Seiten wichtige Frage einer erneuerten Prüfung zu unterziehen.

Wertheim bestimmte die absoluten Elasticitätscoefficienten mittels der bei verschiedenen Temperaturen beobachteten Verlängerung der stabförmigen Substanzen durch eine Belastung. Dass solche absolute Messungen schwierig und mit Fehlern behaftet sind liegt in der Natur der Sache, und daher ist es bedenklich, aus den für verschiedene Temperaturen erhaltenen kleinen Unterschieden die Zahl, welche die Abhängigkeit der Elasticität von der Temperatur ausdrückt, abzuleiten. Indessen verlangt die letztere Aufgabe an sich gar keine absoluten Bestimmungen: wie auf anderen Gebieten physikalischer Messung lassen sich auch hier für die blosse Untersuchung der Variationen besondere Methoden anwenden, die den Vorzug grösserer Empfindlichkeit haben.

Ueberhaupt aber erscheint es misslich, die Aenderung der Elasticität mit der Temperatur durch die Ausdehnung von Stäben zu untersuchen, weil es schwer hält, die langen Stäbe

auf einer constanten hohen Temperatur zu erhalten und weil Temperaturschwankungen auf die Länge der Stäbe einen Einfluss ausüben, welcher die Aenderung des Elasticitätscoefficienten verwirrt. Wertheim selbst hält seine Versuche in höheren Temperaturen für weniger genau.

Dagegen lässt sich leicht auf die Torsionselasticität eine sehr einfache und an Genauigkeit alles Wünschenswerthe leistende Methode anwenden. Wenn man nämlich ein an einen Draht angehängtes Gewicht in drehende Schwingungen versetzt, so ergibt der reciproke Werth des Quadrates der Schwingungsdauer ein genaues Maass für den Torsionscoefficienten des Drahtes. Schwingungsdauerbeobachtungen gehören aber seit den Vorschriften von Gauss zu den feinsten in der Physik möglichen Messungen, so dass kleine Aenderungen des Coefficienten mit grosser Schärfe ermittelt werden können. In dem vorliegenden Falle sprach ausserdem für die Untersuchung der Torsionselasticität eben das im Eingang erwähnte praktische Bedürfniss.

Der mit einem cylindrischen Gewicht, welches für die Beobachtungen einen Spiegel trug, beschwerte Draht befand sich innerhalb eines Raumes, dessen Temperatur durch Heizung mit Wasserdampf bis zu beinahe 100^0 gesteigert werden konnte. Mittels dreier in verschiedener Höhe vertheilter Thermometer konnte die Temperatur in jedem Augenblicke beobachtet werden. Nachdem nun der Raum geheizt worden war, unterbrach man die Zufuhr des ihn umspülenden Dampfes und beobachtete die Schwingungsdauer und die Temperatur, während der Raum sich allmählich abkühlte. Eine Hülle von Filz bewirkte, dass die Abkühlung für die genaue Beobachtung hinreichend langsam stattfand. Die nicht unbedeutende Masse der Thermometer hat

zur Folge, dass ihre Angabe immer etwas hinter der wahren Temperatur des Raumes und des dünnen Drahtes zurückbleibt, allein dieser Unterschied liess sich nach einer besonderen, von Herrn Grotrian angestellten Beobachtungsreihe bestimmen.

Die Temperaturgrenzen der Beobachtung waren in der Regel etwa 90 und 20°; zuweilen wurde auch unter Anwendung von Eis bei tieferen Temperaturen beobachtet.

Um dauernde Aenderungen der Elasticität durch das Erwärmen zu vermeiden, waren die Drähte vor den Beobachtungen wiederholt durch Wasserdampf erhitzt worden. Indessen sind dennoch die einzelnen Versuchsreihen für sich berechnet worden, wobei sich eine sehr gute Uebereinstimmung der Resultate zeigte.

Die untersuchten Metalle sind die drei praktisch wichtigsten, nämlich Eisen, Kupfer und Messing. Alle drei waren in harten Drähten van 0,2 bis 0,3 Millimeter Durchmesser gegeben. Der Kupferdraht war aus reinem, elektrolytisch niedergeschlagenen Kupfer dargestellt; Eisen- und Messingdraht sind die gewöhnlich im Handel vorkommenden.

Es soll hier nur das Resultat der Untersuchungen mitgetheilt werden. Bezeichnet man den Elasticitätscoefficienten bei 0° durch E_0, so wird der Coefficient E für die Temperatur t dargestellt.

für das Eisen

$$E = E_0\,(1-0{,}000447.t-0{,}00000012.t^2),$$

für das Kupfer

$$E = E_0\,(1-0{,}000520.t-0{,}00000028.t^2),$$

für das Messing

$$E = E_0\,(1-0{,}000428.t-0{,}00000136.t^2).$$

Man sieht hieraus erstens, dass die mittlere

Aenderung des Elasticitätscoefficienten für die drei untersuchten Metalle nicht erheblich verschieden ist. Derselbe nimmt nämlich ab, wenn man das Metall von 0° auf 100° erwärmt,

bei dem Eisen um	4,6	Procent
bei dem Kupfer um	5,5	„
bei dem Messing um	5,6	„

Zweitens zeigt sich die Abnahme der Elasticität aller dreier Substanzen für gleiche Temperaturdifferenzen in höheren Temperaturen grösser. Bei Kupfer und Eisen ist diese Zunahme aber fast unmerklich, wie sich aus dem kleinen Coefficienten des quadratischen Gliedes ergibt. Bei dem Messing ist sie erheblich. Es würde nämlich nach obigen Formeln die Aenderung auf einen Grad betragen

	bei 0°	bei 100°
für das Eisen	0,000447	0,000482
für das Kupfer	0,000520	0,000576
für das Messing	0,000428	0,000699.

Jedenfalls ist von dem anfangs erwähnten sonderbaren Verhalten, welches aus Wertheim's Versuchen für das Eisen folgen würde, durchaus nichts zu bemerken. Es kann freilich nicht mit voller Bestimmtheit behauptet werden, dass der Elascitätscoefficient der Ausdehnung nach demselben Gesetz abnimmt wie derjenige der Torsion, aber sehr wahrscheinlich ist der Unterschied, wenn ein solcher vorhanden sein sollte, doch nur unbedeutend.

Ueber unseren Gegenstand liegt noch eine experimentelle Untersuchung von Kupffer vor (Bull. de St. Petersburg T. VI), welche von der Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1855 mit einem Preise gekrönt worden ist. Kupffer hat eine grössere Anzahl von Metallen untersucht, aber nicht dieselben Stücke so eingehend,

dass so, wie für die obigen drei Körper, das Gesetz der Elasticitätsänderung durch die Temperatur aufgestellt werden konnte.

Universität.

Eine neue Modification der Vornähung der Augenmuskeln zur Heilung hochgradigen Schielens.

Von

C. Schweigger.
Prof. Dr. med.

Die Vorlagerung der Augenmuskeln wurde bisher hauptsächlich nur zu dem Zweck ausgeführt entstellende Deviationen, welche als excessive Effecte von Schieloperationen zurückgeblieben waren auszugleichen. Es liegt nicht im Plane dieser kurzen Mittheilung auf das geschichtliche der Operation einzugehen, sondern es soll nur eine Technik angegeben werden, welche ich als eine Vervollkommnung der von J. Guerin, v. Graefe, Crittchet, Knapp, Liebreich und Snellen entwickelten Methoden betrachten zu dürfen glaube.

Zuerst wird die Conjunctiva gerade auf der Insertion des vorzulagernden Muskels und in der ganzen Ausdehnung derselben incidirt, dann nach der Peripherie, hauptsächlich aber nach der Cornea hin gelockert; und zwar bis zum Hornhautrande und in einem Umfang welcher der Breite der Sehneninsertion (10—12 Mm.) entspricht.

Da die Conjunctiva dabei nicht gefenstert werden darf, so operirt man am besten mit einer feinen an den Spitzen abgerundeten Scheere.

Darauf wird an dem einen Ende der Muskelinsertion eine kleine Incision der Tenon'schen Kapsel gemacht, durch welche man einen flach gekrümmten stumpfen Haken zwischen Muskel und Sclera durchschiebt; am andern Ende der Insertion wird ebenfalls die Tenon'sche Kapsel auf den Haken so weit incidirt, dass derselbe frei zu Tage tritt. Jetzt geht man sofort dazu über die Suturen in den Muskel einzulegen.

Zwei feine gewachste Seidenfäden sind jeder mit zwei Nadeln versehen, welche längs des Hakens geführt und von der Scleralfläche des Muskels aus so durchgestochen werden dass jede der beiden Fadenschlingen ein 2—3 Mm. breites Stück des Muskels umfasst. Nun erst wird die Insertion vor dem Haken hart an der Sclera abgelöst, die Nadeln von der Scleralfläche des Conjunctivallappens aus nahe am Hornhautrande durchgestochen und festgeknüpft. Von jeder Sutur wird das eine Fadenende kurz abgeschnitten, das andere aber hinreichend lang gelassen um das Herausnehmen der Suturen am zweiten bis dritten Tage zu erleichtern. Auch die Conjunctivalwunde wird noch durch die Nath vereinigt und schliesslich der die Schielablenkung verursachende Muskel auf die gewöhnliche Weise abgelöst. (Auch für diesen Zweck ziehe ich es vor die Conjunctiva gerade auf der Insertion einzuschneiden).

Für die Nachbehandlung scheint es am zweckmässigsten 24 bis 36 Stunden lang Eisumschläge machen zu lassen und dann einen Druckverband anzulegen.

Die hier empfohlene Technik die Suturen in den Muskel einzulegen ehe er von der Sclera abgelöst wird, ergiebt eine wesentliche Erleichterung des Verfahrens und macht die Operation weniger verletzend. Löst man in

der bisher üblichen Weise den Muskel ab ehe man ihn durch die Suturen gesichert hat, so zieht er sich seiner Elasticität gemäss zurück, und man muss dann mit der Pincette in eine dunkle Tiefe tauchen um ihn wieder hervor zu ziehen, fördert dabei aber nicht viel mehr als die gerade mit der Pincette gefassten Faserbündel zu Tage, und muss für jede Sutur welche man einlegen will dieses keineswegs angenehme Manoever wiederholen.

Die Indicationen dieses Verfahrens halte ich für ausgedehnter als man sie für die bisher üblichen Vorlagerungs-Methoden gelten liess. Bei hochgradigem Strabismus ist ja nicht nur der Muskel in dessen Sinne die Ablenkung erfolgt verkürzt, sondern der Antagonist ist in Folge der fortwährenden Dehnung, welcher er unterworfen ist verlängert. Verrichtet man die einfache Tenotomie so zieht sich der abgelöste Muskel zurück, so weit als seine elastische Spannung es erfordert und seine Verbindungen mit der Tenon'schen Kapsel und der Conjunctiva es erlauben. Gleichzeitig lenkt der Antagonist das Auge nach seiner Seite ab, bis die antagonistisch wirkenden Spannungen sich ausgeglichen haben. Das Maximum dieser Wirkung wird dann erreicht sein, wenn das vordere Ende des abgelösten Muskels relativ zu einem in der Orbita fixirt gedachten Coordinaten-System wieder an denselben Punkt des Raumes geführt ist, an welchem es sich vor der Operation befand. Das Maass der Rücklagerung und der Stellungscorrection sind für diesen Fall gleich, diess braucht aber nicht immer der Fall zu sein, denn trotz aller Rücklagerung würde sich die Stellung des Auges gar nicht ändern wenn der Antagonist keine elastische Spannung besässe.

Für den Effect der Schieloperation ist also

nicht nur die Rücklagerung des verkürzten, sondern auch die elastische Spannung des verlängerten Muskels bestimmend. Vertheilt man in der üblichen Weise die Operation auf beide Augen so erreicht man gar nicht selten für die Correction der Stellung mehr durch die Operation am normalen Auge als am schielenden, weil bei ersterem auch die elastische Spannung des Antagonisten normal ist. Die Vorlagerung giebt uns nun ein sehr einfaches Mittel an die Hand durch Vermehrung der elastischen Spannung des Antagonisten einen weit grösseren Effect zu erreichen. In den relativ häufigen Fällen, in welchen das schielende Auge wegen hochgradiger Schwachsichtigkeit für den Sehact völlig unbrauchbar ist, kommt noch der Umstand hinzu dass die Patienten davor zurückschrecken ihr einzig sehfähiges Auge einer Operation zu unterwerfen, welche lediglich cosmetische Zwecke verfolgt. Diese Befürchtungen mögen übertrieben sein, jedenfalls sind sie ebenso leicht begreiflich als berücksichtigenswerth. Handelt es sich, was der häufigere Fall ist, dabei um Strabismus corvergens, so kann man fast immer darauf rechnen auf die hier angegebene Weise durch eine Operation am schielenden Auge ein cosmetisch befriedigendes Resultat zu erreichen. Den von v. Graefe*) erhobenen Einwurf, dass nach der Vornähung des rectus externus ein zu tiefes Einsinken der Carunkel und eine zu beträchtliche Muskelinsufficienz zurückbleibe habe ich nicht bestätigt gefunden. In Fällen von hochgradigem Strabismus convergens mit Amblyopia amaurotica des schielenden Auges kommt man, wenn man sich auf die einfache Tenotomie beschränkt mit weniger als 3 Operationen (2 am schielenden eine am gesun-

*) Arch. f. Ophth. Bd. IX. 2. pg. 48.

den Auge) in der Regel nicht aus; die Carunkel ist dann auf beiden Augen eingesunken und auf dem schielenden gewiss nicht weniger als nach der Vornähung; ebenso verhält es sich mit der Muskelinsufficienz die ja ohnedem bei amblyopia amaurotica des schielenden Auges nicht sehr in Betracht kommt.

Haben bei Strabismus convergens beide Augen ein brauchbares Sehvermögen so wird die Vornähung nur ausnahmsweise indicirt sein.

Für entstellenden Strabismus divergens bildet die Vornähung geradezu die Hauptmethode; bei hochgradiger Divergenz mit verloren gegangener Convergenzbewegung, ist das Resultat einer einfachen Tenotomie des externus denn doch zu gering, aber auch der Effect der Vornähung fällt etwas geringer aus als bei convergirendem Schielen, da die Sehneninsertion des rectus externus 8 Mm. die des rectus internus nur 6 Mm. vom Hornhautrand entfernt liegt, also auch nur ebenso viel vorgelagert werden kann, wenn man nicht etwa ein Stück vom vordern Ende des Muskels abschneiden will. Immerhin aber wird man darauf rechnen dürfen durch eine Vornähung des internus mit Tenotomie des externus am schielenden Auge ebenso viel zu erreichen wie durch drei auf beide Augen vertheilte einfache Tenotomien des externus.

Für besonders hochgradige Fälle von Strabismus divergens empfiehlt sich die beiderseitige Vornähung der interni mit Rücklagerung der externi.

Der vorgelagerte Muskel verräth sich eine Zeit lang durch seine fleischrothe Färbung welche durch die Conjunctiva hindurch schimmert, mit der Zeit verschwindet aber auch dieser kleine cosmetische Nachtheil.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

Mai 25. №. 12. 1870.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber ein Problem der analytischen Geometrie.

Von

A. Enneper.

In No. IV der analytisch-geometrischen Untersuchungen (Nachrichten v. d. K. G. d. W. 1867 p. 277) sind die Flächen betrachtet, für deren Puncte die orthogonalen Coordinaten sämmtlich der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{d^2t}{du^2}+\frac{d^2t}{dv^2}=o$$

genügen, unter der Voraussetzung, dass u und v die Argumente der Krümmungslinien bedeuten. Ausser den sogenannten Minimumsflächen ergab sich eine bestimmte Zahl von Flächen, deren Coordinaten keine willkührlichen Functionen von u und v enthalten. Zu einem ähnlichen Ergebniss gelangt man für die Flächen, bestimmt durch die Gleichungen:

$$1) \qquad \frac{d^2x}{du^2} = \frac{d^2x}{dv^2}, \; \frac{d^2y}{dv^2} = \frac{d^2y}{dv^2}, \; \frac{d^1z}{du^2} = \frac{d^2z}{dv^2},$$

wo wieder u und v die Argumente der Krümmungslinien sind. Da die Herleitung dieser Flächen zu einigen Untersuchungen über Raumcurven Veranlassung giebt, so soll im Folgenden eine kurze analytische Darstellung derselben gegeben werden.

Setzt man $u + v = p$, $u - v = q$, so gehen die Gleichungen 1) über in:

$$2) \qquad \frac{d^2x}{dp\,dq} = o, \; \frac{d^2y}{dp\,dq} = o, \; \frac{d^2z}{dp\,dq} = o.$$

Mittelst derselben Substitution erhält man aus:

$$\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv} + \frac{dy}{du}\frac{dy}{dv} + \frac{dz}{du}\frac{dz}{dv} = o,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{du\,dv}, & \frac{d^2y}{du\,dv}, & \frac{d^2z}{du\,dv} \\ \frac{dx}{du}, & \frac{dy}{du}, & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv}, & \frac{dy}{dv}, & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix} = o,$$

die Gleichungen:

$$3) \quad \left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2$$

$$4)\qquad \begin{vmatrix} \frac{d^2x}{dp^2}, & \frac{d^2y}{dp^2}, & \frac{d^2z}{dp^2} \\ \frac{dx}{dp}, & \frac{dy}{dp}, & \frac{dz}{dp} \\ \frac{dx}{dq}, & \frac{dy}{dq}, & \frac{dz}{dq} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d^2x}{dq^2}, & \frac{d^2y}{dq^2}, & \frac{d^2z}{dq^2} \\ \frac{dx}{dp}, & \frac{dy}{dp}, & \frac{dz}{dp} \\ \frac{dx}{dq}, & \frac{dy}{dq}, & \frac{dz}{dq} \end{vmatrix}$$

Zu Folge der Gleichungen 2) ist die linke Seite der Gleichung 3) nnr von p, die rechte Seite uur von q abhängig, d. h. jede Seite ist gleich einer Constanten. Bezeichnet man dieselbe durch g^2, so kann, unbeschadet der Allgemeinheit $g = 1$ gesetzt werden, was auf eine Aenderung von $\frac{x}{g}, \frac{y}{g}, \frac{z}{g}$ statt x, y, z in den Finalgleichungen hinauskommt. Sind P, P_1 und Q, Q_1 Functionen respective von p und q, so lassen sich die Gleichungen 2) und 3) ersetzen durch:

$$5)\begin{cases} x = \int \frac{P}{\sqrt{1+P^2+P_1^2}}\,dp + \int \frac{Q}{\sqrt{1+Q^2+Q_1^2}}\,dq, \\ y = \int \frac{P_1}{\sqrt{1+P^2+P_1^2}}\,dp + \int \frac{Q_1}{\sqrt{1+Q^2+Q_1^2}}\,dq, \\ z = \int \frac{1}{\sqrt{1+P^2+P_1^2}}\,dp + \int \frac{1}{\sqrt{1+Q^2+Q_1^2}}\,dq. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$6)\quad \begin{cases} \dfrac{P'}{\sqrt{1+P^1+P_1^2}} = P_2, \quad \dfrac{P'_1}{\sqrt{1+P^1+P_1^2}} = P_3, \\ \dfrac{Q'}{\sqrt{1+Q^1+Q_1^2}} = Q_2, \quad \dfrac{Q'_1}{\sqrt{1+Q^1+Q_1^2}} = Q_3, \end{cases}$$

so geht die Gleichung 4) mittelst der Gleichungen 5) über in:

$$7)\ (P_1-Q_1)P_2 + (Q-P)P_3 = (P_1-Q_1)\,Q_2 + (Q-P)\,Q_3.$$

Schliesst man den Fall der Ebene aus, so kann keine der Seiten der Gleichung 7) identisch verschwinden, d. h. P und P_1 oder Q und Q_1 können nicht gleichzeitig constant sein.

Transformirt man das System der x, y, z in ein anderes orthogonales System der $x_1\,y_1\,z_1$ mit demselben Anfangspunct der Coordinaten, so gehn in den Gleichungen 2), 3), 4), 5) x, y, z über in x_1, y_1, z_1. Unter den Integralzeichen auf den rechten Seiten der Gleichungen 5) treten an die Stelle der Zähler lineare Functionen von P, P_1 und Q, Q_1. Verschwindet für eine der Variabeln z. B. p eine der linearen Functionen, so ist eine der Coordinaten x_1, y_1, z_1 nur von q abhängig. Nimmt man umgekehrt zwischen P, P_1 eine lineare Relation an, so kann man mit Hülfe einer Transformation von Coordinaten immer bewirken, dass eine der Coordinaten x_1, y_1, z_1 nur von q abhängt. Da die Summen $1+P^2+P_1^2$, $1+Q^2+Q_1^2$ durch die Transformation umgeändert bleiben, so kann man für den Fall einer linearen Relation zwischen P und P_1 in den Gleichungen 5) einfach $P = o$ oder $P_1 = o$ nehmen. Setzt man

$P_1 = o$, so ist auch $P_3 = o$, die Gleichung 7) wird dann:

$$P_2Q_1 - PQ_3 + QQ_3 - Q_1Q_2 = o.$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, da weder P constant sein, noch Q_1 verschwinden kann, wenn:

8) $\quad P_2 = aP + b,\ Q_3 = aQ_1,\ Q_2 = aQ + b$

ist, wo a und b Constanten sind. Diese Gleichungen in Verbindung mit 6) geben:

9) $$\frac{P'}{\sqrt{1+P^2}} = aP+b,\ \frac{Q'}{\sqrt{1+Q^2+Q_1{}^2}} = aQ+b,$$

$$\frac{Q'_1}{Q_1} = \frac{aQ'}{aQ+b_1}$$

Die letzte Gleichung integrirt giebt:

10) $$aQ_1 = (aQ + b) \text{ tang } h$$

wo h eine Constante bedeutet. Nimmt man P und Q statt p und q in den Gleichungen 5) als unabhängige Variabele, so folgt mittelst der Gleichungen 9) und 10):

$$ax + bz - ay \cot h = \int \frac{dP}{1+P^2},$$

$$y = \sin h \cos h \int \frac{adQ}{(aQ+b\sin^2 h)^2 + (a^2+b^2\sin^2 h)\cos^2 h.}$$

$$az - bx = \int \frac{dP}{1+P^2}\,\frac{a-bP}{aP+b}$$

$$+\cos^2 h\int\frac{a-bQ}{aQ-b,}\,\frac{a^2dQ}{(aQ+b\sin^2 h)^2+(a^2+b^2\sin^2 h)\cos^2 h}$$

Hieraus folgt:

$$az-bx=\log\left(\sin\varphi+\frac{b}{a}\cos\varphi\right)(\sin\psi+b\cos h\cos\psi),$$

$$\varphi = ax + bz - ay \cot h,$$

$$\psi = \frac{y}{\sin h}\sqrt{a^2+b^2\sin^2 h}.$$

Da sich die Constante b nur auf eine Drehung um die Axe der y bezieht, so kann man einfach $b = o$ setzen. Es ist dann:

$$az = \log\sin(ax-ay\cot h)\sin\frac{ay}{\sin h}$$

Zu einem ähnlichen Resultate führt die Annahme $a = o$ in den Gleichungen 8).

Im Folgenden soll angenommen werden, dass weder zwischen P und P_1 noch zwischen Q und Q_1 eine lineare Relation stattfindet, was von selbst ausschliesst, dass eine der bemerkten Grössen gleich einer Constanten sein kann.

Sieht man in der Gleichung 7) P_1, P_2, P_3 als Functionen von P, Q_1, Q_2, Q_3 als Functionen von Q an, differentiirt die bemerkte Gleichung nach P und darauf nach Q, so folgt:

$$11)\ \frac{dP_3}{dP}+\frac{dQ_3}{dQ}=\frac{dQ_2}{dQ}\,\frac{dP_1}{dQ}+\frac{dQ_1}{dQ}\,\frac{dP_2}{dP}.$$

Durch Differentation nach P leitet man hieraus zwei Gleichungen ab, die $\frac{dQ_2}{dQ}$, $\frac{dQ_1}{dQ}$ in Fun-

ctionen von p geben, d. h. $\frac{dQ_1}{dQ}$ müsste constant sein, was gegen die Voraussetzung ist. Die beiden Gleichungen können nur bestehen für:

$$\frac{\frac{d^3P_3}{dP^3}}{\frac{d^2P_3}{dP^2}} = \frac{\frac{d^3P_2}{dP^3}}{\frac{d^2P_2}{dP^2}} = \frac{\frac{d^3P_1}{dP^3}}{\frac{d^2P_1}{d^2P}},$$

oder:

$$12)\qquad \begin{aligned} P_2 &= BP + A_1 P_1 + C_1, \\ -P_3 &= AP + B_1 P_1 + C, \end{aligned}$$

wo A, A_1, B, B_1, C, C_1 Constanten sind. Setzt man diese Werthe von P_2 und P_3 in die Gleichung 11), so folgt:

$$\frac{dQ_2}{dQ} = -B_1 - A_1 \frac{dQ_1}{dQ},$$

$$\frac{dQ_3}{dQ} = A + B \frac{dQ_1}{dQ},$$

oder:

$$13)\qquad \begin{aligned} Q_2 &= -B_1 Q - A_1 Q_1 - D_1, \\ Q_3 &= AQ + BQ_1 + D, \end{aligned}$$

Mittelst der Gleichungen 12) und 13) geht die Gleichung 7) über in:

$$AP^2 + A_1P_1^2 + (B+B_1)PP_1 + (C+D)P + (C_1+D_1)P_1 = AQ^2 + A_1Q_1^2 + (B+B_1)QQ_1 + (C+D)Q + (C_1+D)Q_1$$

d. h.

$$14)\ \begin{cases} AP^2+A_1P_1{}^2+(B+B_1)PP_1+(C+D)P+(C_1\\ +D_1)P_1=M, \quad AQ^2+A_1Q_1{}^2+(B+B_1)QQ_1\\ +(C+D)Q+(C_1+D_1)Q_1=M, \end{cases}$$

wo M eine Constante bedeutet. Die Gleichungen 12) geben nach 6) durch Division:

$$\frac{P'_1}{P'}+\frac{AP+B_1P_1+C}{BP+A_1P_1+C_1}=o.$$

Die erste Gleichung 14) giebt für $\frac{P'_1}{P'}$ einen zweiten Werth, die Vergleichung dieser beiden Werthe führt, mit Rücksicht auf die erste Gleichung 14), auf eine lineare Gleichung zwischen P und P_1, welche identisch verschwinden muss. Hieraus folgt:

$$A\ (C_1-D_1)+B\ (D-C)+D\ (B_1-B)=0,$$

$$B_1(C_1-D_1)+A_1(D-C)+D_1(B_1-B)=0,$$

$$C\ (C_1-D_1)+C_1(D-C)\quad M\ (B_1-B)=0,$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ B_1 & A_1 & C_1 \\ C & C_1 & -M \end{vmatrix}$$

kann nicht verschwinden, sonst würde jede der Gleichungen 14) sich als Product von zwei Linearfactoren darstellen lassen. Es ist also:

$$D_1 = C_1, \quad D = C, \quad B_1 = B.$$

Zur Bestimmung von P, P_1 in Function von p hat man nach 6), 12) und 14) die Gleichungen:

$$15) \begin{cases} \dfrac{P'}{\sqrt{1+P^2+P_1^2}} = BP + A_1P_1 + C_1 \\ \dfrac{P'_1}{\sqrt{1+P^2+P_1^2}} = -(AP + BP_1 + C), \\ AP^2 + A_1P_1^2 + 2BPP_1 + 2CP + 2C_1P_1 = M. \end{cases}$$

Vertauscht man P, P_1, P', P'_1 respective mit Q, Q_1, $-Q'$, $-Q'_1$ so erhält man die entsprechenden Gleichungen zur Bestimmung von Q und Q_1.

Die Gleichungen 5) zeigen, dass die Fläche durch eine Raumcurve T erzeugt wird, welche sich so bewegt, dass ein mit T fest verbundener Punct eine zweite Raumcurve T_1 beschreibt, wobei vorausgesetzt wird, dass für einen beliebigen Punct von T die Tangente, die Hauptnormale und die Axe der Krümmungsebene sich immer parallel bleiben.

Da die Curve T_1, abgesehn von der Lage, mit der Curve T identisch ist, so genügt es die Curve T zu betrachten.

Sei (x, y, z) ein Punct der Curve T, ϱ der Krümmungshalbmesser, r der Torsionsradius derselben im bemerkten Puncte. Ist für T nur p variabel, so bedeutet dp das Bogenelement.

Durch $\alpha, \beta, \gamma; \lambda, \mu, \nu; l, m, n$ sind die Winkel bezeichnet, welche respective die Tangente, Hauptnormale und Binormale im Puncte (x, y, z) mit den Coordinatenaxen bilden. Es ist dann:

$$\frac{\cos\alpha}{P} = \frac{\cos\beta}{P_1} = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1+P^2+P_1^2)}}.$$

Setzt man in den Gleichungen 15) A, A_1, A_2, B_2, B_1, B statt $A, A_1, -M, B, C, C_1$, so geben diese Gleichungen die folgenden:

$$17)\quad H\cos\alpha + H_1\cos\beta + H_2\cos\gamma = 0,$$

$$18)\quad \pm\cos l = \varrho H,\ \pm\cos m = \varrho H_1,\ \pm\cos n = \varrho H_2,$$

$$19)\quad \begin{cases} H = A\cos\alpha + B_2\cos\beta + B_1\cos\gamma, \\ H_1 = B_2\cos\alpha + A_1\cos\beta + B\cos\gamma, \\ H_2 = B_1\cos\alpha + B\cos\beta + A_2\cos\gamma. \end{cases}$$

Sei:

$$20)\quad \begin{vmatrix} A, & B_2, & B_1 \\ B_2, & A_1, & B \\ B_1, & B, & A_2 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$21)\quad \begin{vmatrix} \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \\ \cos\lambda, & \cos\mu, & \cos\nu \\ \cos l, & \cos m, & \cos n \end{vmatrix} = \varepsilon,$$

Die Gleichungen 18) geben:

$$22)\ \begin{cases} H\cos\lambda + H_1\cos\mu + H_2\cos\nu = 0, \\ H\cos l + H_1\cos m + H_2\cos n = \pm\frac{1}{\varrho}, \end{cases}$$

Die Gleichungen 18) nach p differentiirt geben nach 19):

$$23)\ \begin{cases} \pm\frac{\cos\lambda}{r} = \varrho' H + A\cos\lambda + B_2\cos\mu + B_1\cos\nu, \\ \pm\frac{\cos\mu}{r} = \varrho' H_1 + B_2\cos\lambda + A_1\cos\mu + B\cos\nu, \\ \pm\frac{\cos\nu}{r} = \varrho' H_2 + B_1\cos\lambda + B\cos\mu + A_2\cos\nu. \end{cases}$$

Diese Gleichungen respective mit $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ multiplicirt und addirt geben:

$$24)\ \pm\frac{1}{\nu} = A\cos^2\lambda + A_1\cos^2\mu + A_2\cos^2\nu$$
$$+ 2B_2\cos\lambda\cos\mu + 2B_1\cos\lambda\cos\nu + 2B\cos\mu\cos\nu.$$

Bildet man das Product der Gleichungen 20) und 21), multiplicirt die erhaltene Gleichung mit der Gleichung 21), so folgt, wegen 17), 19), 22), 24) und $\varepsilon^2 = 1$,:

$$25)\qquad \Delta = \mp\frac{1}{r\varrho^2}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$26)\ \begin{cases} L = A\cos l + B_2\cos m + B_1\cos n, \\ L_1 = B_2\cos l + A_1\cos m + B\cos n. \\ L_2 = B_1\cos l + B\cos m + A_2\cos n, \end{cases}$$

so geben die Gleichungen 23) respective mit cos l, cos m, cos n multiplicirt und addirt nach 22) und 26):

27) $$L \cos \lambda + M \cos \mu + N \text{ ca } \nu = \mp \frac{\varrho'}{\varrho}$$

Multiplicirt man die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} A \mp \frac{1}{r}, & B_2, & B \\ B_2, & A_1 \mp \frac{1}{r}, & B \\ B_1, & B, & A_2 \mp \frac{1}{r} \end{vmatrix} = V$$

mit der Gleichung 21), so folgt nach 19), 23) und 26):

$$-\begin{vmatrix} H \mp \frac{\cos \alpha}{r}, & H_1 \mp \frac{\cos \beta}{r}, & H_2 \mp \frac{\cos \gamma}{r} \\ \varrho' H, & \varrho' H_1 & \varrho' H_2 \\ L \mp \frac{\cos l}{r}, & L_1 \mp \frac{\cos m}{r}, & L_2 \mp \frac{\cos n}{r} \end{vmatrix} = V . \varepsilon$$

d. i.

$$\mp \frac{\varrho'}{r} \begin{vmatrix} \cos \alpha, & \cos \beta, & \cos \gamma \\ H, & H_1, & H_2 \\ L \mp \frac{\cos l}{r}, & L_1 \mp \frac{\cos m}{r}, & L_2 \mp \frac{\cos n}{r} \end{vmatrix} = V . \varepsilon$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit der Gleichung 21), so folgt nach 17), 22), 27) und $s^2 = 1$:

$$\pm \frac{\varrho'^2}{r\varrho^2} = V, \text{ oder } V \mp \frac{\varrho'^2}{r\varrho^2} = 0.$$

Setzt man hierin für V seinen Werth, ferner nach 25)

$$\mp \frac{1}{r} = \varrho^2 \Delta,$$

so folgt:

$$\varrho'^2 + 1 + (\Delta_1 \Delta_2 + \Delta \Delta_2 + \Delta \Delta_1$$
$$- B^2 - B_1{}^2 - B_2{}^2)\varrho^2 + \Delta.(\Delta + \Delta_1 + \Delta_2)\varrho^4$$
$$+ \Delta^2 \varrho^6 = 0,$$

durch welche Gleichung ϱ in Function von p bestimmt ist. Die Winkel α, β, γ ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad H^2 + H_1{}^2 + H_2{}^2 = \frac{1}{\varrho^2},$$

$$H \cos\alpha + H_1 \cos\beta + H_2 \cos\gamma = 0.$$

Die letzte dieser Gleichungen zeigt, dass die Tangenten der Curve, parallel mit sich selbst verschoben nach dem Anfangspunct der Coordinaten eine Kegelfläche zweiten Grades bilden. Nimmt man die Hauptaxen dieser Kegelfläche zu Coordinatenaxen, so ist $B=0$, $B_1=0$, $B_2=0$. Sind a, g, k Constanten, so kann man setzen:

$$A = \frac{g}{1 - k'^2 \sin^2 a}, \quad A_1 = \frac{g}{k'^2 \cos^2 a}, \quad A_2 = -\frac{g}{k'^2 \sin^2 a}.$$

Nimmt man:

$$\varrho^2 = \frac{k'^2 \sin^2 a \cos^2 a\,(1 - k'^2 \sin^2 a)\,(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}{g^2 (\cos^2 a + k^2 \sin^2 a \sin^2 \varphi)},$$

$$\frac{g^2}{k'^2 \sin a \cos a \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 a}} = w,$$

so ist:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \frac{d\varphi}{dp} = w, \quad \varphi = \operatorname{amp} w,$$

$$\cos^2 \alpha = (1 - k'^2 \sin^2 a) \frac{\cos^2 \varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi},$$

$$\cos^2 \beta = k'^2 \cos^2 a \frac{\sin^2 \varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi},$$

$$\cos^2 \gamma = k'^2 \sin^2 a \frac{1}{1 - k^2 \sin^2 \varphi},$$

$$\frac{kw}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 a}} \int \cos \alpha \, dp = \frac{1}{2} \log \frac{1 + k \sin \varphi}{1 - k \sin \varphi},$$

$$\frac{kw}{\cos a} \int \cos \beta \, dp = \operatorname{arctang} \left(\frac{k}{k'} \cos \varphi\right),$$

$$\frac{w}{\sin a} \int \cos \gamma \, dp = \operatorname{arctang} (k' \operatorname{tang} \varphi)$$

Setzt man ferner $\psi = am\,q w$ und zur Vereinfachung:

$$\frac{kw}{\sqrt{1-k'^2\sin^2 a}}\,x = x_1, \quad \frac{hwy}{\cos a} = y_1, \quad \frac{wz}{\sin a} = s = z_1,$$

so ist:

$$e^{2x_1} = \frac{1+k\sin\varphi}{1-k\sin\varphi}\,\frac{1-k\sin\psi}{1+k\sin\psi},$$

$$\operatorname{tang} y_1 = kk'\,\frac{\cos\varphi-\cos\psi}{k'^2+k^2\cos\varphi\cos\psi}.$$

$$\operatorname{tang} z_1 = k'\,\frac{\operatorname{tang}\varphi-\operatorname{tang}\psi}{1+k'^2\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi},$$

folglich:

$$k^2\,\frac{e^{x_1}+e^{-x_1}}{2}+k'^2\cos z_1 = \cos y_1,$$

was die Gleichung der Fläche in ihrer einfachsten Form ist.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

April und Mai.

(Fortsetzung.)

Mémoires de l'Académie Imp. des Sciences de St. Pétersbourg. Série VII. T. XIII. Nr. 8 et dernier. — T. XIV. Nr. 1—7. St. Pétersbourg 1869. 4.
Bulletin de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Pétersbourg. T. XIV. Nr. 1—3. Ebd. 4.
H. Wild, Repertorium für Meteorologie. Bd. I. 1. St. Pétersbourg 1869. 4.
— mélanges physiques et chimiques. 8.
Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften, hrsg. v. d. naturwiss. Verein für Sachsen u. Thüringen in Halle, redig. von C. Giebel u. M. Siewert. Jahrg. 1869. Bd. 34.
Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1870. Bd. XX. Nr. 1. Jan.—März; und Verhandlungen Nr. 1—5. Wien. 8.
Archives du Musée Teyler. Vol. II. Fasc. quatrième. Harlem 1869. 8.
Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1869. Bd. XIX. Wien 1869. 8.
Carte géologique des Pays-Bas.
Nr. 25. (les Pays-Bas dans digues) et
Nr. 13. (l'Index).
Neues Lausitzisches Magazin herausg. von E. E. Struve. Bd. 47. Hft. 1. Görlitz 1870. 8.
C. Hasskarl, Commelinaceae indicae imprimis Archipelagi indici adjectis nonnullis hisce terris alienis. Vindobonae 1870. 8.
Forhandlinger i det kong. medicinske Selskab i Kjöbenhavn i Aaret 1868—69. Kjöbenhavn 1869. 8.
Oversigt over det Kong. danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Nedlemmers Arbeider i Aaret 1869. Nr. 9. 1869. Nr. 2. Ebd. 8.

(Fortsetzung folgt.)

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

Juni 22. **№ 13.** 1870.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber die Abbildung einer einblättrigen, einfach zusammenhängenden, ebenen Fläche auf einem Kreise.

Von

E. B. Christoffel, corresp. Mitgliede.

Ich habe die Ehre, der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften nebst einer im Folgenden enthaltenen Mittheilung zwei Abhandlungenzu übe rreichen, von denen die erste schon vor längerer Zeit, die zweite als Nachtrag zu jener so eben in den Annali di matematica der Herrn Brioschi und Cremona erschienen ist.

Dieselben behandeln verschiedene Klassen von besondern Fällen der durch ihre Beziehung zur gegenwärtigen Functionentheorie merkwürdigen Aufgabe, die stationäre Temperaturvertheilung innerhalb einer einblättrigen, einfach zusammenhängenden, ebenen Fläche 𝔓 zu bestimmen.

Diese Aufgabe habe ich in der ersten Abhandlung für alle von einem Polygon begrenzten Flächen 𝔓 gelöst, und sie allgemein auf die

der Functionentheorie angehörige Aufgabe zurückgeführt, die Fläche $\mathfrak{P}$ auf einer geradlinigt begrenzten Halbebene E in den kleinsten Theilen ähnlich und zwar so abzubilden, dass jedem Puncte der einen Fläche ein und auch nur ein einziger, mit ihm sich allenthalben stetig ändernder Punct der andern entspricht.

Nennt man die nach allen Richtungen ins Unendliche reichende Fläche $\mathfrak{P}_1$, welche von einer Ebene übrig bleibt, wenn aus dieser ein einfach zusammenhängendes, endliches Stück $\mathfrak{P}$ herausgeschnitten wird, die Ergänzungsfläche von $\mathfrak{P}$, so kann man die vorhin erwähnten Aufgaben auch auf solche Ergänzungsflächen ausdehnen, und gelangt dann zu einer merkwürdigen Gattung von Problemen, welche so auffallende Schwierigkeiten darbietet, dass die Lösung einer Aufgabe dieser Art ungeachtet aller Anstrengungen bisher nur in dem einzigen, durchaus elementaren Falle gelungen war, wo die Begrenzung von $\mathfrak{P}_1$ ein Kreis ist. Namentlich sind, was im Folgenden seine Erklärung finden wird, alle Versuche gescheitert, irgend einen der besondern, vorzugsweise interessanten Fälle zu behandeln, wo $\mathfrak{P}_1$ von einer geradlinigten Figur begrenzt ist.

Diese zweite Gattung von Aufgaben rührt von Dirichlet her, welcher sie, wie Herr Professor Heine mir vor Kurzem mittheilte, zu Anfange der vierziger Jahre seinen damaligen Schülern empfohlen hat. Der Wunsch, dass eine von meinem grossen Lehrer gestellte und, wie zu erwarten war und der Erfolg bestätigt hat, sich selbst heute noch als fruchtbar bewährende Aufgabe nicht ungelöst bleibe, veranlasste mich, nach einer Lösung derselben zu suchen, welche ich auch für die Ergän-

zungsflächen $\mathfrak{P}_1$ der in meiner ersten Arbeit erledigten Polygone $\mathfrak{P}$ sofort auffand.

Diese Lösung bildet den Gegenstand der zweiten, so eben erschienenen Abhandlung, so dass gegenwärtig die in Rede stehende physikalische Aufgabe und das ihr in der Functionentheorie entsprechende Abbildungsproblem für alle ebenen Flächen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ gelöst ist, welche äusserlich oder innerlich von einem Polygon begrenzt sind.

Ich habe schon in meiner ersten Abhandlung bemerklich gemacht, dass, wenn man will, an die Lösung der physikalischen Aufgabe noch Ansprüche erhoben werden können, von denen dort Abstand genommen ist. In der That liefern meine Formeln unmittelbar die Abbildung der Halbebene E auf $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{P}_1$, während die Bestimmung der Temperaturvertheilung, wenn sie eine omnibus numeris ausgeführte sein soll, umgekehrt die Abbildung von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ auf E verlangt. Dazu ist die auf die Fläche $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ beschränkte und in diesem Umfange stets mögliche Inversion des Integrales einer algebraischen Function erforderlich, wenn für die gegenwärtige Erörterung Polygone mit irrationalen Winkelverhältnissen als Grenzfälle ausgeschlossen werden; und zwar ist dieses Integral für eine Fläche $\mathfrak{P}$ stets von der ersten Gattung, für ihre Ergänzungsfläche $\mathfrak{P}_1$ stets ein lineares Aggregat von gleichverzweigten Integralen zweiter Gattung, und die Klasse p derselben nur in vier Fällen $= 1$, in allen übrigen > 1. Folglich ist die unbeschränkte Inversion dieses Integrales nur bei vier Flächen $\mathfrak{P}$, aber bei keiner einzigen Ergänzungsfläche $\mathfrak{P}_1$ möglich.

Diese vier Flächen $\mathfrak{P}$ sind das Rechteck, das gleichseitige Dreieck und die beiden recht-

winkligen Dreiecke, in denen einer der Winkel 45⁰, 30⁰ vorkommt. Für diese Flächen ist die Lösung der physikalischen Aufgabe den Herrn Lamé und Ostogradski durch die scharfsinnigste Handhabung der von Fourier geschaffenen Methoden gelungen, und es ist sehr bemerkenswerth, dass auf diese Weise die Theorie der partiellen Differentialgleichungen schon frühe im Stande gewesen ist, mit selbstständigen Hülfsmitteln Aufgaben zu lösen, welche thatsächlich der Lehre von den elliptischen Functionen angehören, während allerdings bei der grossen Complication der Resultate diese interessante Beziehung sich nicht zu erkennen gab.

Zugleich ist aus dem Vorangehenden ersichtlich, weshalb die bisherigen Versuche zur Lösung dieser Aufgabe bei keinem andern Polygon $\mathfrak{P}$ und keiner einzigen Ergänzungsfläche $\mathfrak{P}_1$ eines Polygons zum Ziele führen konnten; sie mussten nothwendig an dem Umstande scheitern, dass die dabei zur Verwendung gebrachten Methoden thatsächlich, wenn auch unbewusst, die unbeschränkte Lösung eines in diesem Umfange unstatthaften Inversionsproblems anstrebten, welche sie in den erwähnten vier Ausnahmefällen auch wirklich geleistet haben.

Die Resulte, welche ich für die Polygone gefunden habe, lassen sich auf sehr allgemeine Voraussetzungen übertragen. Ich erlaube mir, diese Untersuchung hier auszuführen, weil sie einen Schritt zur tiefern Ergründung des Abbildungsproblems bildet, für welche seit der Inauguraldissertation Riemanns so gut wie gar nichts geschehen ist, obgleich die Theorie der Abbildung, wegen ihres unmittelbaren Zusammenhanges mit dem Fundamentalsatze der von

Riemann geschaffenen Functionentheorie im höchsten Grade verdient, weiter ausgebildet zu werden.

In einer auf rechtwinklige Coordinaten x, y bezogenen Ebene sei eine geschlossene Kurve K gegeben, welche die Ebene in zwei Theile zerlegt, einen endlichen Theil Π und seine Ergänzungsfläche Π_1. Ausserdem sei eine zweite, auf rechtwinklige Coordinaten X, Y bezogene Ebene vorhanden, und E derjenige Theil derselben, auf welchem $Y > 0$ ist. Es soll E auf jeder der beiden Flächen Π, Π_1 in den kleinsten Theilen ähnlich und zwar so abgebildet werden, dass jedem Puncte der einen Fläche ein und auch nur ein einziger, mit ihm sich allenthalben stetig ändernder Punct der andern entspricht.

Zur Lösung dieser beiden Aufgaben nehme ich auf K n Puncte $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$, . . $\zeta^{(n)}$ an, welche in der nämlichen Ordnung bei einem positiven Umlaufe um Π aufeinanderfolgen, und verbinde jeden mit dem nächstfolgenden durch eine Gerade, wodurch ein K eingeschriebenes Polygon $\mathfrak{K}$ entsteht, welches die Ebene in eine endliche Fläche $\mathfrak{P}$ und ihre Ergänzungsfläche $\mathfrak{P}_1$ zerlegt. Lässt man die Anzahl n der K eingeschriebenen Ecken von $\mathfrak{K}$ ohne Ende wachsen und zugleich jede Seite von $\mathfrak{K}$ ohne Ende abnehmen, so gehen schliesslich $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ in K, Π, Π_1 über.

Sind nun λ_1, λ_2, . . λ_n die der Fläche $\mathfrak{P}$ zugewandten Winkel an den Ecken von $\mathfrak{K}$, und x, Z die Werthe von $x + iy$, $X + iY$ in entsprechenden Puncten von $\mathfrak{P}$ und E, so wird nach art. V meiner ersten Abhandlung über diesen Gegenstand die Abbildung von E auf $\mathfrak{P}$ durch die Gleichung

$$\log \frac{dZ}{dz} = \sum_s \log (A^{(s)} - Z) \frac{\pi - \lambda_s}{\pi} + \text{const.}$$

geleistet, wo allgemein $A^{(s)}$ das auf der X-axe liegende Bild der Polygonecke $\zeta^{(s)}$ bedeutet, so dass auch diese Bilder bei einem positiven Umlaufe um E aufeinanderfolgen wie ihre Indices.

Nun kann man, wenn K stetig gebogen ist, auf dem Bogen $\zeta^{(s)}\, \zeta^{(1)}$ einen Punct ζ_1 so auswählen, dass die Tangente von K in diesem Puncte zur Sehne dieses Bogens parallel wird, ebenso zwischen $\zeta^{(1)}$ und $\zeta^{(2)}$ einen Punct ζ_2 so, dass dort die Tangente von K parallel wird zur Sehne des Bogens $\zeta^{(1)}\, \zeta^{(2)}$, u. s. w.

Um dies weiter anszuführen, sei ζ ein unbestimmter Punct ven K, $d\zeta$ die Zunahme von ζ, welche während eines positiven Umlaufs um Π stattfindet, φ das Azimuth von $d\zeta$. Werden alsdann die Azimuthe in ζ_1, ζ_2 . . ζ_n durch φ_1, φ_2, . . φ_n bezeichnet, so wird $\pi - \lambda_1 = \varphi_2 - \varphi_1$, $\pi - \lambda_2 = \varphi_3 - \varphi_2$, . . $\pi - \lambda_n = \varphi'_1 - \varphi_n$, unter φ'_1 das nach einem positiven Umlaufe um 2π grösser gewordene Azimuth in ζ_1 verstanden, und es folgt:

$$\log \frac{dZ}{dz} = \log (A^{(1)} - Z) \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi}$$

$$+ \log (A^{(2)} - Z) \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\pi} + \,.\,.\, + \text{const.}$$

Diese Formel gilt für jedes n und reducirt mit Hinzuziehung der auf das Innere von $\mathfrak{P}$, E bezüglichen Einändrigkeits- und Stetigkeitsbedingungen die Abbildung dieser Flächen aufeinander auf die Ermittlung der Puncte $A^{(s)}$, in denen die Polygonecken abzubilden sind.

Nun wollen wir die Puncte der X-axe, welche diesen nämlichen Puncten $\zeta^{(s)}$ und dem unbestimmten Puncte ζ von K bei der Abbildung von Π auf E entsprechen, durch $Z^{(s)}$ und Z bezeichnen, so dass allgemein $Z^{(s)}$ als die Grenze angesehen werden kann, gegen die $A^{(s)}$ im Uebergange vom Polygon $\mathfrak{K}$ zur Kurve K convergirt. Dann convergirt beim nämlichen Grenzübergange die vorstehende Summe gegen dieselbe Grenze wie die Summe

$$\log (Z^{(1)} - Z) \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi}$$

$$+ \log (Z^{(2)} - Z) \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\pi} + \ldots + \text{const.},$$

und diese Grenze wird auch nicht geändert, wenn man die Puncte ζ_1, ζ_2, ..., durch welche die Azimuthsänderungen bestimmt sind, nicht in der oben vorgeschriebenen, sondern in irgend einer andern Weise zwischen die Polygonecken einschaltet.

Bezeichnet daher $d\varphi$ die Zunahme, welche φ erlangt, wenn während eines positiven Umlaufes um Π ζ um $d\zeta$ wächst, so ergeben sich die Bedingungen für die Abbildung von Π auf E in der Form:

$$\log \frac{dZ}{dz} = \frac{1}{\pi} \int \log (Z - Z)\, d\varphi + \text{const.},$$

wobei noch hinzuzufügen ist, dass innerhalb E, Π jede der Variabeln z, Z einwerthige und stetige Function der andern sein muss. Schafft man die additive Constante durch Differentiiren weg, so folgt:

1. $$\frac{d}{dZ}\log\frac{dZ}{dz}=\frac{1}{\pi}\int\frac{-d\varphi}{\mathrm{Z}-Z}$$

und zugleich

1a. $$\int d\varphi = 2\pi,$$

wenn beide Male in einem positiven Umlaufe um Π integrirt wird.

Bei diesem Resultate ist nicht zu übersehen, dass eine aus dem Wesen der Sache geschöpfte Verification desselben, da sie sich doch auf die Bedeutung der vorstehenden bestimmten Integrale stützen müsste, nichts als eine Wiederholung des Vorangehenden sein könnte.

Zugleich bemerke ich, dass diese Formel, obgleich sie nur für stetig gebogene Kurven K abgeleitet ist, dennoch auch den Fall umfasst, wo K Ecken hat. Richtet man nämlich das eingeschriebene Polygon $\mathfrak{K}$ so ein, dass es diese Ecken mit K gemein hat, so bleibt in der ursprünglichen Formel ausser den beim Uebergange von $\mathfrak{K}$ zu K abnehmenden Summanden noch für jede Ecke $\zeta^{(s)}$ ein Summand $\log\left(Z^{(s)}-Z\right)\frac{\varphi_{s+1}-\varphi_s}{\pi}$ übrig, welcher der dort stattfindenden plötzlichen Azimuthsänderung $\varphi_{s+1}-\varphi_s$ entspricht. Aber man darf diese plötzliche Zunahme des Azimuths nur als Summe stetiger Zunahmen $d\varphi$ einführen, um die Gleichung 1. auch auf diesen Fall anwendbar zu machen.

Soll die zweite Aufgabe, E und die Ergänzungsflächen $\mathfrak{P}_1$, Π_1 in der oben verlangten Weise auf einander abzubilden, einen Sinn ha-

ben, so muss letztern der nämliche Zusammenhang beigelegt werden, den E besitzt, also im Unendlichen $\mathfrak{P}_1$ ebenso wie Π_1 als geschlossen angesehen werden. Sei hiernach Γ derjenige Punct von E, welcher dem unendlich entfernten Puncte der z-ebene entspricht, Γ^1 die Conjugirte von Γ. Wird alsdann das Product

$$2. \qquad (Z-\Gamma)(Z-\Gamma^1) = \psi(Z)$$

gesetzt, und ein Paar entsprechender Puncte zur Unterscheidung des gegenwärtigen Falles vom vorigen durch z_1, Z_1 bezeichnet, so ergibt sich aus meiner zweiten Abhandlung für die Abbildung von E auf $\mathfrak{P}_1$:

$$\log\left(\frac{dz_1}{dZ_1}(\psi Z_1)^2\right)$$
$$= \sum_s \log(A_1^{(s)} - Z_1)\frac{\pi-\lambda_s}{\pi} + \text{const.},$$

und es ist zunächst zu beachten dass, weil die Richtung eines positiven Umlaufs über $\mathfrak{K}$ für die Fläche $\mathfrak{P}_1$ die umgekehrte ist wie für $\mathfrak{P}$, die Ecken von $\mathfrak{K}$ und ihre gegenwärtigen Bilder $A^{(s)}$, bei einem positiven Umlaufe um $\mathfrak{P}_1$ und E umgekehrt auf einander folgen wie ihre Indices. Derselbe Umstand hat zur Folge dass, wenn $d\zeta$ jetzt einem positiven Umlaufe um $\mathfrak{P}_1$ entspricht, und auch diesmal durch $d\varphi$ die gleichzeitige Zunahme des Azimuths von $d\zeta$ bezeichnet wird, beide genau den entgegengesetzten Werth haben wie im vorigen Falle, so dass also diesmal $\pi-\lambda$ an der Grenze nicht $= d\varphi$, sondern $= -d\varphi$ wird. Da alle übrigen Schlüsse ungeändert bleiben, so erhalten wir für die verlangte Abbildung von Π_1 auf E:

$$3.\quad \frac{d}{dz_1}\log\left(\frac{dz_1}{dZ_1}(\psi Z_1)^2\right) = \frac{1}{\pi}\int\frac{d\varphi}{Z_1 - Z_1}$$

und zugleich

$$3\text{a.}\qquad \int d\varphi = -2\pi,$$

wenn jedesmal in einem positiven Umlaufe um Π_1 integrirt wird.

Hierzu gehört aber, wie am angeführten Orte nachgewiesen ist, eine die Constanten einschränkende Bedingung, welche dazu dient, die ohne sie nothwendig eintretenden logarithmischen Verzweigungen von z_1 im Puncte Γ von E zu beseitigen. Für das Polygon lautet sie:

$$\Sigma\,\frac{\Gamma^1 - A_1^{(s)}}{\Gamma - A_1^{(s)}}\cdot\frac{\pi - \lambda_s}{\pi} = 0,$$

also in unserm Falle

$$4.\qquad \int\frac{\Gamma^1 - Z_1}{\Gamma - Z_1}\,d\varphi = 0.$$

Für die Anwendungen ist es gut zu bemerken, dass diese Gleichung bestehen bleibt, wenn die conjugirten Grössen Γ, Γ^1 vertauscht werden, weil ausser ihnen nur reelle Grössen in der Formel vorkommen.

Bei der vorangehenden Untersuchung war der Grenzfall ausgeschlossen, wo die Kurve K sich bis ins Unendliche erstreckt. Tritt dieser Fall ein, so ist es gleichgültig, ob man die beiden Flächen, in welche die z-ebene zerlegt ist, den Flächen Π oder Π_1 zuordnet, nur muss man berücksichtigen, dass jetzt der unendlich entfernte Punct der Ebene mit zur Begrenzung

gehört, sich also auch auf der Begrenzung von E abbildet, so dass auf diesen Punct allein der ganze Beitrag zum $\int d\varphi$ als plötzliche Azimuthsänderung kommt, den die Kurve K selbst nicht liefert.

Dies festgestellt, wirft sich die Frage auf, was durch die vorstehenden Formeln für die wirkliche Lösung unserer Aufgaben gewonnen ist. In der That setzen dieselben, so wie sie gefunden worden sind, voraus, dass φ als Function von Z resp. Z_1 bekannt sei oder was auf das nämliche hinauskommt, dass man die Abbildung von K auf dem Rande von E kenne. Denn wenn φ als Function von Z gegeben ist, so darf man nur noch aus der Gleichung von K einen zweiten Ausdruck für $tg\,\varphi$ ableiten, um zwei Gleichungen zu erhalten, aus denen an K entlang ζ als Function von Z folgt.

Es hat demnach den Anschein, als könnten die gefundenen Resultate die Abbildung von E auf Π oder Π_1 nur in denjenigen Fällen liefern, wo die dazu gehörigen Abbildungen der Begrenzungen aufeinander bereits bekannt sind.

Hier tritt nur ein wesentlicher Umstand ein, der diese Schwierigkeit, welche sich in ähnlicher Weise auch in der Theorie der Minimalflächen darbietet, in zahlreichen Fällen vollständig beseitigt, und sie in allen Fällen auf ihren wahren Ursprung zurückführt.

Sei $\zeta = \xi + i\eta$ und die Kurve K durch irgend eine unzerfällbare Gleichung zwischen ξ und η gegeben. Ist ζ^1 die Conjugirte von ζ, so ist $2\xi = \zeta + \zeta^1$, $2i\eta = \zeta - \zeta^1$, also kann man die Gleichung von K darstellen als Gleichung zwischen ζ und ζ^1. Zugleich wird

$$\frac{d\zeta}{d\zeta^1} = e^{2i\varphi}, \quad d\varphi = -\frac{1}{2i}\, d \log \frac{d\zeta^1}{d\zeta}.$$

Nunmehr setze man in der Gleichung von K für ζ den Ausdruck

$$\frac{z + s}{2},$$

an Stelle von η den Ausdruck

$$\frac{z - s}{2i};$$

dann wird s eine durch die Gestalt der Kurve K und die Lage der Coordinatenaxen völlig bestimmte Function von z, und umgekehrt K der Ort aller derjenigen Puncte z, in denen s und z conjugirte Werthe haben.

Bezeichnen wir den Werth dieser Function im Puncte ζ, ζ_1 durch σ, σ_1, so gehen die oben gefundenen Formeln über in

$$\text{I.} \qquad \frac{d}{dZ} \log \frac{dZ}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d \log \frac{d\sigma}{d\zeta}}{Z - Z}$$

$$\text{II.} \quad \frac{d}{dZ_1} \log \left(\frac{dz_1}{dZ_1} (\psi Z_1)^2 \right) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d \log \frac{d\sigma_1}{d\zeta_1}}{Z_1 - Z_1}$$

$$\text{III.} \qquad \int \frac{\Gamma^1 - Z_1}{\Gamma - Z_1}\, d \log \frac{d\sigma_1}{d\zeta_1} = 0,$$

wo jedesmal in einem positiven Umlaufe um E oder im ersten Falle um Π, im zweiten um Π_1 zu integriren ist. In der nämlichen Bedeutung genommen folgt:

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} \int d \log \frac{d\sigma}{d\zeta} = -4\pi i \\ \int d \log \frac{d\sigma_1}{d\zeta_1} = 4\pi i. \end{cases}$$

Die weitere Ausführung dieser Resultate setzt voraus, dass der bis jetzt auf die Kurve K beschränkten Variable ζ alle complexen Werthe eingeräumt werden. Wenn unter dieser Voraussetzung der unter dem Integralzeichen vorkommende Factor

$$\omega = \frac{d}{d\zeta} \log \frac{d\sigma}{d\zeta}$$

zu einer mehrwerthigen Function von ζ wird, so tritt die Nothwendigkeit ein, den hier vorausgesetzten Zweig dieser Function in bestimmter Weise ven allen übrigen zu trennen.

Ist T die mehrblättrige Fläche, welche in dem angegebenen Falle die Verzweigungsart von ω darstellt, so ist die zu erledigende Frage die, welches Blatt von T in den obigen Formeln für die Ebene der z, ζ, d. h. der Fläche Π, Π_1 zu nehmen ist.

Nun hat derjenige Zweig von $\frac{d\sigma}{d\zeta}$, welcher bei unserer Untersuchung vorausgesetzt wurde und in allen Fällen existirt, die Eigenschaft, nach einem einmaligen Umlaufe um K zu seinem ursprünglichen Werthe $e^{-2i\varphi}$ zurückzukeh-

ren, das nämliche gilt daher auch von dem hier zu bestimmenden Zweige von ω. Man kann daher den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Blättern von T so einrichten, dess mindestens auf einem Blatte, nämlich demjenigen, welches diesem Zweige von ω entspricht, ein Umlauf um K möglich ist, ohne dass dabei ein Uebergang von diesem Blatte auf ein anderes nöthig wird. Dieses Blatt hat also die wichtige Eigenschaft, dass keine von den Linien, an denen entlang dasselbe mit andern zusammenhängt, durch die Kurve K hindurchgeht.

Nur auf diesem Blatte kann die Gleichung von K die Form $\sigma = \zeta^1$ annehmen; denn wäre dies auch noch für ein anderes Blatt von T die Gleichung der auf demselben verzeichneten Kurve K, so stimmten die beiden Zweige von σ, also die beiden diesen Blättern zugeordneten Zweige von ω an einer Linie entlang, mithin allenthalben überein.

Fügen wir jetzt noch die für unsern Zweck nothwendige Bedingung hinzu, dass jedes Blatt von T eine ganze Ebene, aber keinen Theil derselben mehrfach bedecken soll, so ist das von uns auszuwählende Blatt völlig bestimmt und von allen übrigen unterschieden durch die Bedingung, dass auf ihm an K entlang der Werth von σ mit dem Werthe des eindeutigen Ausdrucks ζ^1 zusammenfallen soll, und hierdurch ist zugleich die Bedeutung von σ und ω für die ganze Ausdehnung dieses Blattes festgelegt.

Dieses Blatt nehme man zur ζ-ebene und betrachte die Linien, an denen entlang es ursprünglich mit andern Blättern von T zusammenhing, als Schnitte derselben. Jede solche

Schnittlinie geht also von einem Verzweigungspuncte bis zu einem andern und ist im Uebrigen willkürlich bis auf die als zulässig nachgewiesene Bedingung, durch L nicht hindurchzugehen.

Jetzt kann man in den obigen Gleichungen den geschlossenen Integrationsweg nach Belieben erweitern oder zusammenziehen, so lange nur kein Unstetigkeitspunct oder eine Schnittlinie überschritten wird. Dabei ist aber zu bemerken, dass diese auszuschliessenden Stellen nur für den Factor ω in der ganzen ζ-ebene bekannt sind, für den Factor $\frac{1}{Z - Z}$ nur innerhalb Π, für $\frac{1}{Z_1 - Z_1}$ nur innerhalb Π_1, und zwar ist jener innerhalb Π einändrig und bis auf den Punct $\zeta = z$, wo er zur ersten Ordnung unendlich wird, auch stetig. Aehnliches gilt von $\frac{1}{Z_1 - Z_1}$ innerhalb Π.

Eine wirkliche Vereinfachung unserer Gleichungen kann also nur dadurch erreicht werden, dass man in I. den Integrationsweg auf die innerhalb Π vorhandenen Schnittlinien und Unstetigkeitspuncte zusammenzieht, dagegen in II. III. denselben erweitert, bis er sich um die Schnittlinien und Unstetigkeitspuncte auf der Fläche Π_1 zusammengezogen hat.

In beiden Fällen lassen sich die auf blosse Unstetigkeitspuncte bezüglichen Integrale sofort ausführen, wenn man, abgesehen von den Unstetigkeitspuncten $\zeta = z$, z_1, die Bilder Z dieser Puncte als Parameter einführt, und somit ist es klar dass, die nähere Bestimmung dieser Parameter vorbehalten, die von uns gestellte Aufgabe für alle diejenigen Flächen Π, Π_1 ge-

löst ist, welche Unstetigkeits- aber keine Verzweigungspuncte von ω enthalten.

In allen übrigen Fällen lassen die obigen Formeln eine der oben erörterten analoge Schwierigkeit bestehen, nur dass nicht mehr die Abbildung der beiderseits völlig gegebenen Begrenzungen aufeinander, sondern die Abbildung jeder, nur an feste Endpuncte gebundenen Schnittlinie auf einer in jeder Beziehung unbekannten Linie innerhalb E verlangt ist.

Ich behalte mir vor, auf diese Frage bei einer andern Gelegenheit zurückzukommen, und bemerke zum Schlusse der gegenwärtigen Mittheilung nur noch den Satz, dass die obigen Gleichungen auch die Abbildung von Π, Π_1 auf einer Kreisfläche liefern. Die einzige Aenderung, deren es ausser der entsprechenden Beschränkung der Variabeln Z, Z_1 für diesen Zweck bedarf ist diese, dass man für Γ, welcher dem unendlich entfernten Puncte von Π_1 entspricht, irgend einen Punct dieser Kreisfläche, und für Γ^1 statt der Conjugirten von Γ denjenigen mit Γ auf demselben Durchmesser liegenden äussern Punct zu nehmen hat, dessen Polare durch Γ geht.

Man beweist diesen Satz, indem man z. B. mittelst der, auch auf Z, Γ, Γ^1 anzuwendenden Substitution $r\,[Z - i] = (Z)\,[Z + i]$, welche einer Abbildung von E auf der Kreisfläche $(X)^2 + (Y)^2 < r^2$ entspricht, die Gleichungen I. II. III. transformirt, wobei die Gleichungen IV. zu berücksichtigen sind, und nachher bei den neuen Variabeln die Klammern weglässt, wodurch die ursprünglichen Gleichungen wieder zum Vorschein kommen, und nur die Beziehung zwischen Γ und Γ^1 in der angegebenen Weise geändert worden ist.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

Juli 6. №. 14. 1870.

Universität.

Am 15. Juni fand die akademische Preisvertheilung statt; die Festrede hielt Prof. Wachsmuth über die Bedeutung von Rhodos für Handel und Cultur in der Diadochenzeit.

Von den Preisaufgaben hatte die der theologischen Facultät „quid virtutem christianam inter et naturalem intersit, exponatur" zwar einen Bearbeiter gefunden, dieser aber die Aufgabe nicht richtig aufgefasst, so dass ihm trotz des löblichen Fleisses der Preis nicht zuerkannt werden konnte. Auch bei der juristischen Facultät war eine Bearbeitung ihrer aus dem vorigen Jahre wiederholten Aufgabe „explicentur principia iuris Romani de poena confiscationis bonorum" eingegeben, und dieser konnte bei dem Mangel an zweckmässiger Ordnung und historischer Begründung der Principien des römisch-justinianischen Rechts doch das Lob einer recht fleissigen und selbständigen, aus den Quellen schöpfenden Arbeit nicht versagt werden; deshalb hatte die Facultät beschlossen, dem Verfasser den Preis zuzuerkennen und nur die Erlaubniss, die Schrift unter Autorisation der

Facultät in Druck zu geben, zu versagen. Als Verfasser ergab sich

Karl Ziel, stud. iur. aus Loccum.

Die medicinische und die ausserordentliche philosophische Aufgabe hatte Niemand zu lösen versucht. Die ordentliche Aufgabe der philosophischen Facultät „de Eratosthenis chronographi fontibus et auctoritate" war zweimal bearbeitet; aber die eine Arbeit genügte weder in Inhalt noch Form den mässigsten Ansprüchen, war auch erst am 18. April eingereicht; die andere konnte auch in ihrer jetzigen Gestalt nicht gekrönt werden, weil sie die eigentliche Aufgabe zu kurz und zu wenig selbständig behandelt hatte.

Die neuen Preisaufgaben sind folgende:

Als wissenschaftliche Aufgabe stellt die theologische Facultät:

Appellatio Jesu Christi ὁ κύριος vel κύριος quam originem atque vim habeat, e luculentissimis Novi Testamenti locis, Veteris quoque ratione habita, demonstratur.

und als Predigttext giebt sie die Stelle:

Ev. Johannis 15, 14--16.

Die juristische Facultät verlangt eine Abhandlung:

De natura possessionis eorum, qui iura in re aliena exercent.

Die Aufgabe der medicinischen Facultät lautet:

Es wird eine genaue Untersuchung der Structurveränderungen des Rückenmarks gewünscht, welche nach Vergiftungen durch Strychnin etwa entstehen mögen. Die Untersuchung wird sowohl an durch das Gift rasch oder allmälig getödteten, als auch an

nach der Vergiftung wiederbelebten Thieren vorzunehmen sein.

Als ordentliche Aufgabe stellt die philosophische Facultät:

De marchis Germanicis, earum origine et institutis publicis et finibus inde a saeculo X. usque ad medium saeculum XII. disseratur.

als ausserordentliche:

Curvarum fumicularium quae in superficie globi sitae sunt casus quidam ad integralia elliptica revocantur Diario Crelli tomo 57. *Harum Curvarum species diversae perscrutandae et coordinatae ope functionum ellipticarum exhibendae sunt.*

Ausserdem wiederholt sie die vorjährige Aufgabe:

De Eratosthenis chronographi fontibus et auctoritate.

Die Bearbeitungen müssen mit einem Motto versehen werden und sind zugleich mit einem versiegelten Zettel, welcher aussen dasselbe Motto trägt und innen den Namen des Verfassers enthält, bis zum 15. April 1871 den Dekanen der Facultäten einzuliefern. Die Bearbeitung der medicinischen und der ausserordentlichen philosophischen Aufgabe kann auch in deutscher Sprache erfolgen.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 2. Juli.

Meissner, fortgesetzte Untersuchungen über den elektrisirten Sauerstoff.
Listing, Notiz über ein neues Mikroskop von. R. Winkel.
Schering, die Schwerkraft im Gauss'schen Raum.

Waitz, über die Annalen von Lüttich, Fosses und Lobbes.
Benfey, Entstehung und Verwendung der mit *r* anlautenden Personalendungen im Sanskrit. (Erscheint in den Abhandlungen.)
Wieseler, das Fener- und Heerdsymbol bei den Griechen und Römern. (Erscheint in den Abhandlungen.)
Wicke, Mittheilung über Vegetations-Versuche.
Enneper, zur Theorie der Helikoidflächen.

Ueber die Annalen von Lüttich, Fosses und Lobbes.

Von

G. Waitz.

Wattenbach führt noch in der zweiten Auflage der Geschichtsquellen (S. 440. 488) die Mon. Germ. hist. SS. IV. gedruckten Annales Leodienses als eine nach Lüttich gehörige analistische Aufzeichnung an. Ich glaube mit Unrecht. Seitdem die sogenannten Annales S. Jacobi minores (SS. XVI.) bekannt geworden sind, muss sich das Urtheil über dieselben wesentlich anders stellen.

Schon Bethmann hat erkannt, dass in den späteren Jahren Siegebert und seine Fortsetzer benutzt sind (SS. VI, S. 275 N.): er nimmt aber an, dass das erst seit dem Jahre 1099 geschehen, wo in dem Pariser Codex eine andere Hand beginne, die bis zum Jahre 1124 geschrieben, während eine verschiedene, wie er meint zuerst in Fosses, — 1137, eine dritte — 1146 das Werk fortgeführt habe. Ich will die Richtigkeit dieser Angaben in keiner Weise bezweifeln, habe aber grosse Bedenken anzunehmen, dass die verschiedenen Schreiber selbst verschiedenen so weit auseinander liegenden Jahren angehört haben, da die Benutzung Anselms von

1113—1139 gleichmässig durchgeht, die Annalen in der That hier nichts sind als ein schlechtes Excerpt aus diesem, gerade zuletzt so mangelhaft gemacht, dass Anselms Nachrichten von 1134 falsch zu 1137, 1135 zu 1139 (mit dem Irrthum, dass der Fridericus dux Suevorum zu einem d. Bawariae wird) gesetzt sind, und sich 1142 und 1146 auch eine deutliche Spur der Benutzung der weiteren Continuatio Gemblacensis zeigt (1142. Plaga ignis divini multos adurit, wo Pertz das undeutliche na| des Codex der Annalen in 'flamma' verwandelt hat; 1146 Cont.: Fames gravissima jamdiu concepta in tantum longe lateque praevaluit etc. Multos etiam, qui victu et aliis necessariis habundabant, malum famis ad mendicitatem deduxit; Ann.: Fames gravissima hoc anno multos afflixit). Eben von da an werden die auf Fosses und die Nachbarschaft bezüglichen Nachrichten häufiger.

Dass es unter diesen Umständen an sich sehr geringe Wahrscheinlichkeit hat, dass ein so viel früheres Stück der Annalen, 1089—1098, auf selbständigen Aufzeichnungen beruhe, liegt auf der Hand. Das Verhältnis zu Siegebert ist auch hier ganz dasselbe wie in den folgenden Jahren: die Annalen geben kurz was jener fast überall in grösserem Detail erzählt, wie ein paar Beispiele das Verhältnis deutlich machen mögen. Wenn Siegebert sagt 1097: Cometes in occidente apparuit tota prima ebdomada Octobris, so die Ann.: Cometes apparuit in occidente mense Octobris; Siegebert 1098: Cuonradus Vultrajectensis episcopus feria 4. pascae post missam a se celebratam a quodam suorum in domo sua perimitur, Ann.: Cuonradus Vultrajectensis episcopus a quodam suorum perimi-

tur. Wer will glauben, dass Siegebert, wo er so viel genauer unterrichtet war, die mangelhaften Nachrichten der Annalen ausgeschrieben und nur ergänzt habe? Oder dass er, wenn er 1096 eine längere Erzählung von dem ersten Kreuzzug giebt, für den Anfang die kurze Notiz der Annalen verwerthet habe: Occidentales christiani indignantes loca sancta Hierosolimis a paganis occupari una conspiratione contra eos proficiscuntur? Scheint er sich früher zu den Ann. S. Jacobi, die er sicher benutzte, ähnlich zu verhalten, so ist die Sache bei näherer Betrachtung hier eine andere. Er erweitert wohl auch ihre Nachrichten, aber so dass regelmässig nichts thatsächliches hinzukommt, nur der Ausdruck ein vollerer wird, oder dass er etwas allgemein bekanntes hinzufügt. So macht er aus dem Satz der Annales 1029: Conradus imperator contra Sclavos proficiscitur: C. i. rebellantibus Sclavis ad eos debellandos proficiscitur; und ebenso 1030; aus Ann. 1040: Rex Heinricus contra Odolricum ducem Boemiae pergit, sed inefficax redit: H. imperator vadit ad debellandum O. Boemanorum d., sed Boemanis viriliter resistentibus inefficax redit; oder wo die Ann. haben 1076: Godefredus dux et decus Galliae a sicario perimitur, schreibt er: Sicarius in Fresonia Godefridum ducem perimit, wo er das 'in Fresonia' leicht andersher entnehmen konnte.

Es möchte scheinen, als wenn an dieser Stelle die Ann. Fossenses dem Siegebert näher ständen als die S. Jacobi, da sie sagen: Ducem Godefridam sicarius interimit; doch ist die Verschiedenheit des 'perimere' und 'interimere' jedenfalls ebenso erheblich als die Umwandlung des passiven Satzes in die active Rede. Wahrscheinlich aber war die Fassung in den Ann.

S. Jacobi früher auch eine andere, da der Satz wie er jetzt lautet von anderer Hand auf radiertem Grunde geschrieben ist. Sonst zeigt sich auch nirgends eine Verwandtschaft Siegeberts mit diesem Codex, und wir sind daher in keiner Weise veranlasst, das an sich immer sehr unwahrscheinliche Verhältnis anzunehmen, dass Siegebert erst diese Handschrift oder eine Abschrift derselben benutzt und dann eben sie aus ihm und seinen Fortsetzern einen grossen Theil ihres historischen Stoffs entlehnt habe.

Die Sache stellt sich vielmehr einfach so, dass die Annales S. Jacobi Leodienses in ihrem ältern Theil — 1087 von Siegebert benutzt, eben sie oder richtiger ihre Quelle auch zur Grundlage für neue Annalen in Fosses gemacht wurden, zu deren Fortsetzung man sich kurzer Auszüge aus Siegebert, Anselm und der weiteren Continuatio Gemblacensis bediente. Diese Annales Fossenses sind SS. IV gedruckt, würden aber jetzt grossentheils nur in kleiner Schrift zu geben sein.

Dem älteren mit Unrecht, wie wir eben gesehen, nach Lüttich gesetzten Theil der Ann. Fossenses sind Ann. Laubienses, Jahrbücher des Klosters Lobbes, parallel gedruckt. Pertz nahm früher an, dass beide auf älteren bis zum J. 1056 sich erstreckenden annalistischen Aufzeichnungen beruhten (IV, S. 8), hat diese Ansicht aber später so modificiert, dass er die Ann. Laubienses als Quelle der Ann. S. Jacobi, diese wieder als Grundlage der sog. Ann. Leodienses (d. h. der Fossenses) betrachtet (XVI, S. 633).

Keins von beiden kann richtig sein.

Dagegen hat schon Giesebrecht (Kaisergesch. I, S. 778) bemerkt, dass diese späteren Jahrbücher des Klosters Lobbes nur eine Compi-

lation von Lütticher und den Weissenburger Annalen seien. Es ist nicht deutlich, ob er dies allein auf den späteren Theil der Ann. Laubienses bezieht (vgl. II, S. 564. III, S. 1030), wie Wattenbach (S. 245 N. 1) es verstanden zu haben scheint. Gewiss gilt dasselbe auch für den früheren. Fast alle die Stellen bei denen schon Pertz auf eine Verwandtschaft mit den Ann. Hersfeldenses hingewiesen hat, 727. 747. 755 u. s. w., gehören hierhin (nicht 745, da die entsprechenden Worte sich auch in den Ann. Leod. finden); aber auch anderes was die Ann. Laub. mehr haben als die Leod., z. B. 1044: Heinricus Hungariam subjugat magno praelio confecto.

Aber noch eine ganz andere Quelle ist in den Laub. benutzt, und zwar keine andere als wieder die Chronik des Siegebert. Darüber lassen einzelne Stellen nicht den mindesten Zweifel, 895 über den Berno, 958 über Gerardus Broniensis, 960 den h. Udalrich (wo Pertz bemerkt, die Notiz müsse nach 993 geschrieben sein; allerdings, da sie aus dem späten Siegebert ist), 963 über Wibert, 969 Theoderich von Metz. Nun erklärt sich auch, wie es in den Annalen heissen kann:

1045: Benedictus papa et duo cum eo; quibus tribus *canonica censura* ab imperatore Heinrico *depositis*, Clemens papa substituitur.

1046: Heinricus, filius Cuonradi, fit imperator, et tres papae ab eo deponuntur.

So schreibt natürlich nur ein später nachlässiger Compilator. 1046 ist aus derselben Quelle wie die Lütticher Annalen; 1045 aus Siegebert, der schreibt: Romae uno contra duos et duobus contra unum de papatu altercantibus, rex Heinricus contra eos Romam vadit; et eis *canonica* et imperiali *censura depositis*, Suidegerus . . . . qui et Clemens . . . . presidet.

Aus Siegebert stammt auch das 'Godefridus custodia relaxatus' zum Jahr 1046.

Es ist klar, dass diese späte Compilation nicht Quelle der schon im 12ten Jahrhundert gleichzeitigen Ann. S. Jacobi Leodienses sein kann.

Diese selbst werden aber auch nicht als die erste und originale Aufzeichnung gelten dürfen. Dagegen spricht schon, dass sie zum J. 1076 einen handgreiflichen Fehler haben: Hildulfus archiepiscopus obiit statt fit, wie es richtig in den Leod. (Foss.) heisst. Dazu kommt, dass sie bis zum Jahr 1075 von einer Hand geschrieben, wahrscheinlich vor 1087 nicht gleichzeitig sind*, während in den Leod. (Foss.) und Laub. sich, wie schon Giesebrecht bemerkt, deutliche Angaben über eine Abfassung um das Jahr 1000 finden: 866. Huic (Basilio) usque ad nostra tempora, id est anno millesimo ab inc. D., Alexander etc.; 872. Huic (Johanni) succedunt usque ad annum millesimum inc. D. per annos 128 Stephanus etc. Von diesen beiden Notizen findet sich die zweite gar nicht in den Laub., die erste unvollständig nur bis Nicephorus, d. h. 969 statt 1000. Den Ann. S. Jacobi sind beide Stellen fremd. Die Laub. sind also auch hier abgeleitet und mangelhaft. Aber auch die Ann. S. Jacobi können nicht Grundlage weder für das eine noch das andere Exemplar der beiden verwandten Annalen sein. Vielmehr müssen alle drei aus einer gemeinschaftlichen Quelle geschöpft haben, die Ann. Laub. — 1056, die S. Jacobi und Foss. (früher Leod.) — 1085 oder — 1086, wo erst ihre Verwandtschaft ein Ende hat. Diese älteren Annalen wurden um das Jahr 1000

*) Das Wechseln der Handschriften im Satz 1075 scheint zufällig zu sein, nicht einen neuen Autor anzudeuten. Ein solcher tritt erst 1091 ein.

begonnen, aber später fortgeführt. Ihr Tenor ist reiner in den Ann. S. Jacobi als in den andern erhalten; erst wenn man ausscheidet was diese aus jüngeren Quellen oder an localen Nachrichten eingeschaltet haben und zusammenstellt was allen drei oder doch zwei gemeinsam ist, lässt sich ihr Bestand herstellen.

Pertz hat bemerkt (IV, S. 8), dass in diesen älteren Aufzeichnungen, wie auch er solche annimmt, sich Verwandtschaft mit den früheren Annalen von Lobbes (Ann. Lobienses, SS. II) zeige. Die Verwandtschaft ist zum Theil so gross und der Art, dass man sie gewiss nur auf Benutzung zurückführen kann. Man vergleiche:

A. Lob.	A. S. Jac. Leod.
942. *Gislebertus* habens in matrimonio sororem domini sui nomine Gerbergam, sed ei rebellis existens, *cum Everardo periit.*	938. *Gislebertus* dux *cum Evrardo periit.*
Eodem anno *Ludovicus rex uxorem ejus* sibi matrimonio copulavit.	939. *Ludowicus rex uxorem ejus* accepit.
943. Stella *cometes apparuit, et fames subsecuta* est.	941. *Cometes apparuit, et fames subsecuta.*
956. *Liutulfus rex* in Italia diem clausit extremam . . . dominus Otto *victoriam de Ungris* obtinuit.	956. *Liedulfus rex* obiit. *Victoria de Ungris.*
968. Dominus noster *Otto rex* Italiam *a patre* evocatur, atque ab eo *consors imperii* solempniter *asciscitur.*	968. *Otto* junior *a patre consors imperii asciscitur* Romae.

Die Ann. Lob. sind zu Anfang in den Zahlen verwirrt (ob auch in der Handschrift, bemerkt Giesebrecht nicht, der über sie Auskunft giebt, II, S. 592); sonst herrscht völlige Uebereinstimmung; zu bemerken ist das unrichtige 'rex' bei Liudolf.

Aber auch die zweite Hand der Ann. S. Jacobi, welche Zusätze macht die in den Ann.

Laub. und Foss. fehlen, hat die Ann. Lobienses benutzt; wie besonders deutlich zeigt:

A. Lob. 923.	A. S. Jac.
Eodem anno *Karolus* cum *Heinrico* rege Germanorum foedus iniit, et ab amore (l.: ob amorem) Heinrici *Lothariensi regno* cessit. *Juratum* est *utrinque* ab *episcopis et comitibus* in medio Reni fluminis apud Bonnam.	*Karolus* rex Francorum reddit *Heinrico regnum Lotharingiae*, *episcopis et comitibus utrinque jurando* rem confirmantibus.

Die Sache ist bekanntlich so unrichtig. — Zu vergleichen ist auch 924, während der Zusatz 918 aus anderer Quelle sein muss.

Kann es scheinen als wenn Grund vorhanden wäre, auch die um das J. 1000 geschriebenen und später fortgesetzten Annalen nach Lobbes zu setzen, so spricht doch anderes dafür diese mit Giesebrecht Lüttich zu vindicieren. Während die Ann. Lobienses bei den Lütticher Bischöfen regelmässig den Sitz angeben, geschieht das in den Annalen, um die es sich hier handelt, nicht; jene werden vollständig aufgeführt, aber stets ohne allen weiteren Beisatz. Keine einzige Notiz bezieht sich in dem allen drei Exemplaren gemeinschaftlichen Bestand auf Lobbes oder auf ein anderes Kloster. Eben nur Lüttich wird berücksichtigt und schon deshalb dies Stift als die Heimat der allen zu Grunde liegenden, aber mit Hülfe der Ann. Lobienses gemachten Aufzeichnungen zu betrachten sein.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

April und Mai.

(Fortsetzung.)

L. Lorenz, Experimentale og theoretiske Undersøgelser over Legernernes Brydningsforhold. Kjöbenhavn 1869. 4.

A. Steen, om Aendringen af Integraler af irrationale Differentialer til Normalformen for det elliptiske Integral af første Art. Ebd. 1869. 4.

T. Thomsen, Thermochemiske Undersøgelser over Affinitetsforholdene imellem Syrer og Baser i vandig Opløsning. Ebd. 1869. 4.

Zur Erinnerung an Wilhelm Wackernagel, geb. zu Berlin den 23. April 1806, gestorben zu Basel den 21. Dec. 1869. Basel 1870. 8.

Berichte über die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig:
Mathemathisch-physikalische Classe 1867. III. IV.
» » » 1868. I. II. III.
» » » 1869. I.
Leipzig 1868. 89. 8.

P. A. Hansen, fortgesetzte geodätische Untersuchungen. 1868.

— Supplement zu den geodätischen Untersuchungen. Leipzig 1869. gr. 8.

— Ausgleichung eines Dreiecknetzes. Ebd. 1869. gr. 8.

Engelhardt, Flora der Braunkohlenformation im Königreich Sachsen, mit einer Mappe enthaltend XV Tafeln. Ebd. 1870. gr. 8.

Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

Juli 13. № 15. 1870.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Die Schwerkraft im Gaussischen Raume.

Von

Ernst Schering.

Unter den von Euclid zusammengestellten Grundgesetzen für die Geometrie hat dasjenige eine besondere Bedeutung, welchem zufolge zwei gerade Linien, die in einer Ebene liegen und eine dritte Gerade so schneiden, dass die Summe der beiden innern mit der dritten Geraden auf einer Seite derselben gebildeten Winkel kleiner als ein gestreckter Winkel ist, sich auf eben dieser Seite von der dritten Geraden bei geeigneter Verlängerung treffen.

Die geringe Einfachheit dieses Grundgesetzes im Vergleich mit den übrigen ist schon sehr frühzeitig die Veranlassung gewesen, dieses Grundgesetz durch ein einfacheres zu ersetzen zu suchen. Dass die Bestrebungen keinen befriedigenden Erfolg haben konnten, hat Gauss zuerst bemerkt, nachdem er erkannte, dass durch jenes Grundgesetz dem Raume eine Eigenschaft

beigelegt wird, die ihm nicht zuzukommen braucht, ohne dass dieserhalb irgend eins der andern der bei Euclid aufgestellten Grundgesetze eine Abänderung erleiden müsste. Gauss hat nemlich gefunden, dass unter Beibehaltung der übrigen Grundgesetze es nur erforderlich ist, dass, wenn die beiden Geraden einander treffen, die Summe der drei inneren von den drei Geraden gebildeten Winkel um eine solche Grösse kleiner als ein gestreckter Winkel wird, die in einem unveränderlichen von der Beschaffenheit des Raumes allein abhängigen Verhältnisse zu dem Flächeninhalt des gebildeten Dreiecks steht.

Des kürzeren Ausdruckes wegen will ich einen Raum mit dieser Eigenschaft einen Gaussischen Raum nennen im Gegensatze zu dem Euclidischen Raume, für welchen die Summe der Winkel in einem Dreiecke gleich einem gestreckten Winkel ist.

Zu den Lehrsätzen, die man bisher in der, unter verschiededenen Namen behandelten, Geometrie des Gaussischen Raumes gefunden hat, will ich an diesem Orte nur die folgenden von mir aufgestellten hinzufügen.

LEHRSATZ I. Bezeichnet allgemein (1.2) oder (2.1) den analytischen Cosinus des Products von $\sqrt{-1}$ multiplicirt in die mit der absoluten Längeneinheit, welche durch die Beschaffenheit des besonderen Gaussischen Raumes bestimmt wird, gemessene Entfernung zwischen zwei Punkten (1) und (2), bezeichnet demnach (1.1) oder (2.2) die abstracte Einheit, so wird die für die zehn Entfernungen zwischen irgend welchen fünf Punkten (1), (2), (3), (4), (5) im Gaussischen Raume bestehende Bedingungsgleichung dargestellt durch das Verschwinden der Determinante der Grössen

$$\begin{matrix} (1.1) & (1.2) & (1.3) & (1.4) & (1.5) \\ (2.1) & (2.2) & (2.3) & (2.4) & (2.5) \\ (3.1) & (3.2) & (3.3) & (3.4) & (3.5) \\ (4.1) & (4.2) & (4.3) & (4.4) & (4.5) \\ (5.1) & (5.2) & (5.3) & (5.4) & (5.5) \end{matrix}$$

Eine durch die beiden nicht zusammenfallenden Punkte (1) und (2) gehende Gerade heisse das Gebiet aller der Punkte (3), für welche die Determinante der in der angegebenen Weise bestimmten Grössen

$$\begin{matrix} (1.1) & (1.2) & (1.3) \\ (2.1) & (2.2) & (2.3) \\ (3.1) & (3.2) & (3.3) \end{matrix}$$

verschwindet.

Eine durch die drei nicht in einer Gerade liegenden Punkte (1), (2), (3) gehende Ebene heisse das Gebiet aller der Punkte (4), für welche unter Beibehaltung der Bezeichnung die Determinante der Grössen

$$\begin{matrix} (1.1) & (1.2) & (1.3) & (1.4) \\ (2.1) & (2.2) & (2.3) & (2.4) \\ (3.1) & (3.2) & (3.3) & (3.4) \\ (4.1) & (4.2) & (4.3) & (4.4) \end{matrix}$$

verschwindet.

Diese in der Folge häufig wiederkehrende Form einer Determinante mag mit D bezeichnet werden.

Projection einer Linie auf eine zweite Linie heisse derjenige Abschnitt auf der zweiten Linie, welcher von den Fusspunkten der aus den Endpunkten der ersten Linien nach der zweiten Linie gezogenen kürzesten Linien begrenzt wird.

LEHRSATZ II. Gehen von einem Punkte irgend welche vier Gerade (1), (2), (3), (4) von beliebiger Länge aus und bezeichnen (1.1), (1.2)

u. s. f. die analytischen Tangenten der in $\sqrt{-1}$ multiplicirten und mit der absoluten Einheit gemessenen Längen der Projectionen der Geraden (1) auf die Geraden (1), (2) u. s. f. so ist die nach der Form D aus diesen vier mal vier Tangenten gebildete Determinante gleich Null.

Das Verhältniss der analytischen Tangenten der in $\sqrt{-1}$ multiplicirten und mit der absoluten Einheit gemessenen Länge der Projection einer Geraden auf eine andere Gerade zu der analytischen Tangente der in $\sqrt{-1}$ multiplicirten mit der absoluten Einheit gemessenen Länge der projicirten Geraden ist unabhängig von dieser Länge und bleibt ungeändert, wenn man die Gerade, welche selbst und diejenige auf welche projicirt wird mit einander vertauscht, deshalb mag diejenige kleinste Grösse, deren analytischer Cosinus diesem Verhältnisse gleich wird, als das Maass des Winkels zwischen den beiden Geraden angenommen werden.

LEHRSATZ III. Gehen von einem Punkte vier Gerade (1), (2), (3), (4) aus und bezeichnen (1.1), (1.2) u. s. f. die Cosinus der Winkel zwischen der Geraden (1) und den Geraden (1), 2) u. s. f. so ist die nach der Form D aus diesen vier mal vier Cosinus gebildete Determinante gleich Null.

LEHRSATZ IV. Sind (1), (2), (3) irgend drei Punkte im Raume, bezeichnen (1.1), (1.2) u. s. f. die analytischen Cosinus der in $\sqrt{-1}$ multiplicirten mit der absoluten Längeneinheit gemessenen Entfernungen des Punktes (1) von (1), (2) u. s. f. bezeichnen (1.1*) oder (1*.1), (2.2*) oder (2*.2), (3.3*) oder (3*.3) die analytischen Sinus der in $\sqrt{-1}$ multiplicirten mit der absoluten Längeneinheit gemessenen kürzesten Entfernungen der Punkte (1), (2), (3) von den gegen-

überliegenden Seiten des Dreiecks (1, 2, 3), bezeichnen ferner (2*. 3*) oder (3*. 2*), (3*. 1*) oder (1*. 3*), (1*. 2*) oder (2*. 1*) die Cosinus der drei Winkel in den Ecken des Dreiecks und setzt man (1*. 1*) = (2*. 2*) = (3*. 3*) = 1 und alle übrigen zwölf Zeichen

$$(1 . 2^*) = (2^*. 1) = (1^*. 2) = (2 . 1^*) = \ldots = 0$$

so verschwinden alle fünfzehn Determinanten von der Form *D*, wenn man darin statt der Glieder 1, 2, 3, 4 je vier von den Gliedern 1, 2, 3, 1*, 2*, 3* setzt.

Der erste dieser Lehrsätze kann, nach geeigneter Abänderung der Ausdrucksweise, auch als einzige Grundlage, ohne dass die Zuhülfenahme irgend einer anderen Voraussetzung erforderlich wäre, für die Aufstellung einer ganzen Geometrie dienen, die als speciellen Fall die Euclidische auch mit umfasst, für welche nemlich die absolute Längeneinheit unendlich gross wird.

Eine gleich vollständige und allgemeine Grundlage bildet für die Lehre von der Bewegung das Gaussische Princip des kleinsten Zwanges, das in der bekannten Form auch für einen Gaussischen Raum gilt, wenn die Geschwindigkeiten sich stetig ändern.

Ein besonderes analytisches Interesse verdienen, wie ich an einem anderen Orte gezeigt habe, die Probleme der Bewegung für solche Kräfte, deren Summe der virtuellen Momente als Summe der totalen Variation einer Function und der totalen Derivirten nach der Zeit eines linearen Ausdrucks von Variationen angesehen werden kann. In diesem Falle gilt unter Anderem eine Integralgleichung, die als eine Verallgemeinerung des Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft erscheint.

Bestehen ferner die Kräfte nur in solchen Wechselwirkungen zwischen den bewegten Theilchen, für welche auch noch Wirkung und Gegenwirkung gleich sind und in der Verbindungs-Geraden zwischen den entsprechenden Punkten liegen, und finden endlich keine äussere Beschränkung der Bewegungen statt, so gelten für den Gaussischen Raum einige den Principien der Erhaltung des Schwerpunkts und der Erhaltung der Flächen entsprechende Sätze.

Nach dem Princip der Superposition kann man unendlich kleine Bewegungen als das Resultat des gleichzeitigen Stattfindens sehr verschiedenartiger besonderer Bewegungen betrachten. Unter diesen Bewegungen kommen hier die beiden folgenden Arten in Betracht, die Bezug haben auf eine beliebig angenommene feste gerade Linie, die Axe genannt werden mag. Diese beiden Componenten der unendlich kleinen Bewegung eines Punktes sind zwei Bewegungen, bei welchen derselbe in ungeänderter Entfernung von der festen Axe bleibt, nemlich entweder zugleich in derselben durch die feste Axe gehenden Ebene oder zugleich in derselben zur festen Axe normalen Ebene bleibt. Die erste Art der Bewegungen eines Systems von Punkten wollen wir eine lineare Bewegung längs jener Axe, die zweite eine Drehbewegung um die Axe nennen und das Verhältniss, in welchem zu der Zeit im ersten Falle die Projection des von dem Punkte durchlaufenen Weges auf die Axe und im zweiten Falle der durch die kürzeste von dem Punkte nach der Axe gezogenen Gerade beschriebenen Winkel steht, als das Maass der Lineargeschwindigkeit und der Rotationsgeschwindigkeit betrachten.

Für diese Bewegungen gilt unter den zuvor angegebenen Bedingungen folgender

LEHRSATZ V. Die Summe der Producte der Massentheilchen multiplicirt in den während der Zeit dt von jedem Theilchen wirklich zurückgelegten Weg in Folge dieser Linearbewegung oder Drehbewegung und noch multiplicirt in den Weg, den das Theilchen während der Zeit dt bei der Einheit beziehungsweise der Lineargeschwindigkeit oder Drehgeschwindigkeit zurückgelegt haben würde, ist gleich dem Producte einer Constanten multiplicirt in dt^2.

Der Lehrsatz, auf drei sich nicht schneidende und nicht in einer Ebene liegende Axen angewandt, gibt sechs Integralgleichungen für Linearbewegungen und sechs für Drehbewegungen, welche sich gegenseitig ersetzen können.

Diese Beziehungen zwischen den beiden Systemen von Gleichungen beruht auf einer Eigenthümlichkeit eines Gaussischen Raumes, die sich so aussprechen lässt, dass jede unendlich kleine Bewegung eines festen Körpers sowohl allein durch Linearbewegungen längs drei Axen dargestellt werden kann als auch allein durch Drehbewegungen um drei Axen, während im Euclidischen Raum das erste allgemein nicht möglich ist wol aber das zweite.

Die Untersuchung der Kräfte, welche die uns durch die Erfahrung bekannten Erscheinungen in der Körperwelt hervorbringen könnten, wenn der uns umgebende Raum ein Gaussischer wäre, bietet dadurch besonderes Interesse dar, dass sie die mehr oder weniger wesentlichen Gesetze für die Kräfte zu unterscheiden veranlasst.

Meine Untersuchungen über die Wechselwirkungen zwischen electrischen Theilchen habe ich an einem andern Orte ausgeführt, hier will

ich nur auf die Schwerkraft näher eingehen. Ich habe gefunden, dass die Potentialfunction V für deren Wechselwirkung zwischen den Massentheilchen m, μ u. s. f. durch die Summe der Glieder von der Form

$$m\mu\varepsilon \operatorname{cotang} \varepsilon (m, \mu) \; \ldots\ldots \quad \mathrm{V}$$

zu bestimmen ist, worin

(m, μ) die mit einer beliebigen Längeneinheit gemessene Entfernung zwischen den Massentheilchen m und μ

$\frac{\sqrt{-1}}{\varepsilon}$ eine von der Beschaffenheit des besonderen Gaussischen Raumes abhängige und mit der bei der Bestimmung der übrigen Längen zu Grunde gelegten Einheit gemessene Länge bedeutet.

Sind $\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{arc tang} x$, $\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{arc tang} y$, $\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{arc tang} z$ die Projectionen der ersten Hälfte der von einem beliebigen festen Punkte nach dem Punkte m gezogenen Geraden auf drei zu einander rechtwinkelige durch den festen Punkt gehende im übrigen beliebige feste Geraden und bestimmen ξ, η, ζ den Punkt μ in entsprechender Weise wie x, y, z den Punkt m so wird für die Entfernung zwischen diesen beiden Punkten

$$\sin \tfrac{1}{2}\varepsilon(m, \mu)^2 = \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{(1+xx+yy+zz)(1+\xi\xi+\eta\eta+\zeta\zeta)} \ldots \mathrm{VI}$$

Die wesentlichen Eigenschaften dieser Potentialfunction ergeben sich aus folgendem

LEHRSATZE VII. Bezeichnet V die Potentialfunction für die von beliebigen Massen auf einen Punkt, in welchem die Masseneinheit concentrirt gedacht wird, wirkende Schwerkraft,

$d\Omega$ das Flächenelement eines beliebigen Systems von geschlossenen Flächen, $\frac{dV}{dN}dN$ die Zunahme welche V annimmt, während der die Masseneinheit enthaltende Punkt von einem Punkt in dem Flächenelement $d\Omega$ zu demjenigen Punkte auf der innern Seite desselben übergeht, der von dem ersteren Punkt eine geringere Entfernung hat als von irgend einem anderen Punkt in der Fläche Ω und zwar die Entfernung dN, bebezeichnet ferner π die bekannte Zahl 3,1415... so ist das Integral

$$-\frac{1}{4\pi}\int\frac{dV}{dN}d\Omega$$

ausgedehnt über das ganze System der geschlossenen Flächen Ω gleich der Summe der von diesen Flächen eingeschlossenen Massen, wenn in den Flächen selbst keine Flächentheile, Linien oder Punkte endliche Massentheile enthalten.

Bestimmt man die Lage des die Masseneinheit enthaltenden Punktes durch irgend welche rechtwinkelige krummlinige Coordinaten ξ, η, ζ bezeichnet mit $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ und $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ irgend welche zwei unendlich kleine Ortsänderungen dieses Punktes und setzt das Product der Längen der von dem ersten Orte dieses Punktes nach jenen beiden benachbarten Orten gezogenen Geraden in einander und in den Cosinus des von diesen Geraden eingeschlossenen Winkels multiplicirt gleich

$$\xi'\xi'.d\xi.\delta\xi+\eta'\eta'.d\eta.\delta\eta+\zeta'\zeta'.d\zeta.\delta\zeta \quad \ldots \text{VIII}$$

und also ξ', η', ζ' gleich bestimmten Functionen welche allein von ξ, η, ζ abhangen: so ergibt sich hieraus als specieller Fall der:

LEHRSATZ IX. Es ist

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\xi'\eta'\zeta'}\left\{\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\eta'\zeta'}{\xi'}\frac{dV}{d\xi}\right)+\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\zeta'\xi'}{\eta'}\frac{dV}{d\eta}\right)+\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\xi'\eta'}{\zeta'}\frac{dV}{d\zeta}\right)\right\}$$

welcher Ausdruck in der Folge mit $-\frac{1}{4\pi}\nabla V$ bezeichnet werden soll, gleich der Dichtigkeit der auf den Punkt ξ, η, ζ einwirkenden Masse, wenn solche an dieser Stelle im Raume stetig vertheilt ist.

Das Verhalten der Function V in der Nähe von Flächen, Linien und Punkten, an welchen die Verbreitung der Massen im Raume nicht stetig ist, und in welchen sie theilweise zu endlicher Intensität verdichtet ist befindet sich mit dem entsprechenden Verhalten der Potentialfunction für die Schwerkraft im Euclidischen Raum in solcher Uebereinstimmung, dass ich es der Kürze halber hier nicht ausführen will.

Die vielfachen Anwendungen, die man von der Bestimmung der Function V durch die Werthe von ∇V, durch die Grenzwerthe von V und durch die Unstetigkeiten machen kann, ergeben sich mit Hülfe des geometrischen

LEHRSATZES X. Es ist

$$\int\left(\frac{1}{\xi'\xi'}\cdot\frac{dU}{d\xi}\cdot\frac{dV}{d\xi}+\frac{1}{\eta'\eta'}\cdot\frac{dU}{d\eta}\cdot\frac{dV}{d\eta}+\frac{1}{\zeta'\zeta'}\cdot\frac{dU}{d\zeta}\cdot\frac{dV}{d\zeta}\right)dT$$
$$=-\int U\frac{dV}{dN}d\Omega-\int U\nabla V dT$$
$$=-\int V\frac{dU}{dN}d\Omega-\int V\nabla U dT$$

wenn dT das Raumelement, ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes desselben bedeuten, wenn

die auf dT bezüglichen Integrale über den gesammten von den innern Seiten des Flächensystems Ω begrenzten Raumtheil T ausgedehnt werden, wenn sowohl U als V als jede ihre Derivirten der beiden ersten Ordnungen in jedem Punkte des Raumtheils T einen bestimmten beliebigen Werth hat, und wenn die übrigen Bezeichnungen die zuvor angegebene Bedeutung beibehalten.

Notiz über ein neues Mikroskop von R. Winkel.

Von

J. B. Listing.

Das neueste aus der Hand des hiesigen Künstlers Herrn R. Winkel hervorgegangene für das mathematisch-physikalische Institut bestimmte Mikroskop, welches ich der K. Gesellschaft vorzuführen mir erlaube, verdient sowohl in optischer als in mechanischer Hinsicht Beachtung. Die sechs Objectivsysteme Nr. 1, 2, 4, 5, 7 und 8 mit Brennweiten von 20 bis 2.3 Millim. geben verbunden mit den Ocularen Nr. 1, 2, 3, 5 Vergrösserungen von 45 bis 1100 mal (Sehweite 250 Millim.), und gewähren Bilder, welche sich durch Klarheit und Lichtstärke wie durch die Sorgfalt, mit welcher in ihnen die beiden Arten der Abweichungen corrigirt sind, auszeichnen. Schärfe der Zeichnung und Auflösungskraft stellen das Instrument auf gleichen Rang mit Mikroskopen aus den längst bewährten französischen und englischen Werkstätten, auf beiden Seiten Objectivsysteme von nahezu gleicher Brennweite vorausgesetzt. Hr. Winkel wird demnächst noch stärkere Systeme, versehen mit ei-

ner ihm eigenen Correctionsvorrichtung*) für die Dicke des Deckglases anfertigen, welche die Vergrösserung ohne Anwendung der Immersion bis auf 2000 zu steigern erlauben. Erwähnenswerth ist noch hinsichtlich der Verwendung der Glassorten, dass Hr. Winkel nur möglichst niedrige, d. h. mit nur mässigem Bleioxydgehalt versehene Flintglassorten zu seinen Systemen verwendet, welche von der sonst so häufig vorkommenden Deteriorirung durch Einfluss von Luft und Feuchtigkeit vollkommen frei sind, und wodurch das Mikroskop vor einer oft sehr zu beklagenden Kürze der Dauer seiner Brauchbarkeit geschützt ist.

Das Corpus des Instruments hat bei möglicher Einfachheit und Solidität die Einrichtung erhalten, Verschiebungen in der Richtung der Axe ebenso scharf als bequem zu messen. In der festen Stativhülse bewegt sich mittelst Hebelrades eine zweite Hülse, welche gleichfalls verschiebbar das Rohr mit dessen Ocular-Auszug trägt. Neben den grossen Verschiebungen, welche mit Scale und Nonius gemessen werden, dient die feine Einstellung zugleich als verticales Schraubenmikrometer, durch welches Stellungsunterschiede des Objectivsystems bis auf 7 Zehntel eines Mikrum oder eines Tausendstel Millimeters bestimmt werden können. Ich habe dem Instrumente diese Einrichtung vornehmlich zu dem Behuf scharfer Bestimmung der Cardinalpunkte von Linsensystemen geben lassen.

*) wobei nicht wie meistens bisher, die weitere Doppellinse des Objectivsystems gegen die zwei oberen, sondern die beiden oberen gegen die feste untere bewegt wird, welches meines Erachtens eine wesentliche Erleichterung in der Handhabung der Correction während der Beobachtung gewährt.

Vegetations-Versuche.

(Mitgetheilt von **Wilh. Wicke.**)

Die Wasserculturen über welche ich in No. 4 1869 der Nachrichten berichtet habe, sind von meinem Assistenten, Herrn Dr. P. Wagner auch im vorigen Sommer fortgesetzt worden. Bei den mit Kreatin angestellten Vegetations-Versuchen war der Nachweis des stickstoffhaltigen Nährstoffs in den lebenden Pflanzen nicht vollständig geglückt, wie dies bei den früher von Dr. Hampe ausgeführten Versuchen mit Harnstoff der Fall war. Schon aus diesem Grunde und auch deshalb, weil es nicht gelungen war, die Nährstofflösung frei von Pilzen und in Folge dessen von Ammoniak zu erhalten, erschien eine Wiederholung der Vegetations-Versuche mit Kreatin als stickstoffhaltigem Nährstoff wünschenswerth.

Die Pflanzen waren wieder Maispflanzen, von der im Handel unter dem Namen »Badischer Mais« bekannten kleineren Sorte.

Die Körner wurden in destillirtem Wasser zum Keimen und Wachsen gebracht, die Pflanzen erhielten dann zuerst eine $^1/_2$ p.m. Lösung und wurden später in Gefässe von $4-4^1/_2$ Liter Inhalt, mit einer 1 p. m. Lösung, versetzt. Die Nährstofflösung wurde regelmässig alle 14 Tage erneuert. Ihre Zusammensetzung war diese:

$$\left.\begin{matrix}KaO\\2HO\end{matrix}\right\}PO^5 + {}^1/_2\,(C^8H^9N^3O^4 + 2aq.) + {}^1/_2\,Ca\,Cl + {}^1/_2\,MgO, SO^3 + x\,Fe^2O^3, PO^5.$$

Um die den Versuch in störender Weise beeinflussende Pilzvegetation zu verhindern, wurden die Lösungen jeden zweiten bis dritten Tag

mit Kohlensäure gesättigt. Dies Mittel hatte den beabsichtigten günstigen Erfolg.

Die gebrauchten Lösungen wurden jedesmal auf Kreatin untersucht. Das Resultat war bis etwa Mitte Juni stets ein positives; in den am 19. und 28. Juli untersuchten Lösungen konnte aber kein Kreatin nachgewiesen werden.

Am 24. Mai war

Pflanze I. 39 Cm. hoch und hatte 6 Blätter, das 5. Blatt war 26 Cm. lang
„ II. 36 Cm. hoch und hatte 7 Blätter, das 4. Blatt war 20 Cm. lang.
„ III. 37 Cm. hoch

Am 28. Juli war

Pflanze I. 92 Cm. hoch und hatte 8 Blätter. Das längste Blatt mass 31 Cm. bei einer Breite von 5 Cm.
„ II. 90 Cm. hoch. 8 Blätter
„ III. 86 „ „ 9 „

Mitte Juli hatten sich bei allen drei Pflanzen die männlichen Blüthen normal entwickelt, während eine Anschwellung des Fruchtkolbens bei I. noch nicht vorhanden war.

Die Pflanzen I und II wurden um diese Zeit für den Versuch verwendet, das Kreatin in ihnen nachzuweisen. Zu dem Ende erfolgte eine getrennte Untersuchung des Krautes und der Wurzeln, die in der Art zur Ausführung kam, dass das mit weingeisthaltigem Wasser zerstampfte Kraut ausgepresst, der Saft gekocht, das davon erhaltene Filtrat eine halbe Stunde lang mit Thierkohle digerirt, heiss filtrirt und alsdann concentrirt wurde. Nach viertägigem Stehen wurde die über dem Bodensatze stehende klare Flüssigkeit entfernt, ersterer mit Wasser in der Wärme ausgezogen, heiss filtrirt und die

so erhaltene Lösung zur Krystallisation über Schwefelsäure gestellt. Erhalten wurden einige schwach gelblich gefärbte Krystalle, welche sich, nach mehrmaligem. Umkrystallisiren, unter dem Mikroskope als Kreatin-Krystalle mit Sicherheit erkennen liessen.

Dahingegen gelang der Versuch, auch aus den Wurzeln das Kreatin in Substanz wieder darzustellen, nicht.

Pflanze III. wurde am 29. Juli mit Pollen von Gartenpflanzen künstlich befruchtet und darauf bis zur Ernte in destillirtes Wasser gestellt. Sie hatte am 14. August ihre Vegetation beendet und wog nun, bei einer Höhe von 88 Cm., 20,5 Grm. Von den 22 Körnern, welche der Kolben trug, waren 4 unvollkommen ausgebildet.

Die am Schlusse mitgetheilte Tabelle enthält detaillirte numerische Angaben über das Erntegewicht u. s. w.

Da bei diesem Versuch die Nährstoff-Lösung unzersetzt, und namentlich frei von Ammoniak erhalten wurde, das Kreatin aber in der lebenden Pflanze nachgewiesen werden konnte, so ist damit der Beweis geliefert, dass das Kreatin ebenfalls, wie der Harnstoff, als stickstoffhaltiger Nährstoff in den Pflanzen functioniren kann. Beide Körper gehören ja auch den regressiven Stoffwechsel-Producten des thierischen Organismus an.

Vegetations-Versuche mit Mangansalzen.

Durch diese Versuche sollte constatirt werden: ob eine Vertretung des Eisens durch Mangan im Vegetationsprocess der Pflanze möglich. Frühere, von Bir-

ner und Lucanus in dieser Richtung angestellte Versuche mit Haferpflanzen, hatten ein negatives Resultat ergeben. Dabei war eine chlorfreie Lösung benutzt und es war möglich, dass bei Anwendung von Chlor ein anderes Ergebniss erhalten wurde. Auch war noch zu versuchen: ob nicht bei Anwendung eines Manganoxydsalzes, statt des von den Genannten benutzten phosphorsauren Manganoxyduls, ein normales Wachsthum eintrete.

Bei den von Dr. Wagner ausgeführten Versuchen wurde daher sowohl eine phosphorsaure Manganoxydul- als auch oxydhaltige, übrigens eisenfreie Nährstoff-Lösung, in Anwendung gebracht.

Versuch A, mit phosphorsaurem Manganoxydul.

mit vier Maispflanzen ausgeführt, begann am 3. Mai mit einer 1 p. m. Lösung folgender Zusammensetzung:

$$2\left(\begin{matrix}KaO\\2HO\end{matrix}\right\} PO^5\Big) + \frac{1}{2}(3\,MnO, PO^5) + Ca\,Cl + MgO, SO^3 + 2(NH^4O, NO^5)$$

Schon nach acht Tagen zeigten sich erhebliche Störungen im Wachsthums-Process, welche sich durch ein Blass- und Schlaffwerden der älteren und einem Fehlen des Chlorophylls in den jüngsten Blättern zu erkennen gaben. Dieser Zustand war bereits am 14. Mai in eine vollständige Chlorose übergegangen. Dabei hingen die Wurzeln schlaff und nahmen eine schleimige Beschaffenheit an. Als nach vorhergegangener Reizung der Wurzeln eine Lösung von $\frac{1}{2}$ p. m. Concentration versucht wurde, besserte sich der

Gesundheitszustand zweier Pflanzen (III und IV) in etwas, und die jüngsten Blätter färbten sich schwach grün; die beiden andern Pflanzen aber kümmerten dauernd und gingen Mitte Juni gänzlich ein.

Mit Pflanze III, welche bereits am 22. Mai wieder vollständig bleichsüchtig geworden war, wurde der Versuch gemacht, sie in einer manganfreien, aber phosphorsaures Eisenoxyd enthaltenden Nährstoff-Lösung wieder gesund zu machen. Der dadurch erzielte günstige Erfolg sprach sich darin aus, dass zuerst die jüngsten Blätter, nach 8—12 Tagen aber auch die übrigen Blätter sich wieder grün färbten. Gleichzeitig brachen aus dem untersten Stengelknoten neue Wurzelfasern hervor; aber die wiederholt eingegetretenen Unterbrechungen im Wachsthum hatten doch bereits so störend gewirkt, dass, als die Pflanze Ende Juni abstarb, ihre Höhe nur 23 Cm. betrug.

Pflanze IV. behielt ihre alte Lösung, empfing aber dazu noch einen Zusatz von phosphorsaurem Eisenoxydul. Ein günstiger Erfolg trat nicht ein, die Pflanze blieb bleichsüchtig und ging schon nach einigen Wochen zu Grunde.

Versuch B, mit phosphorsaurem Manganoxyd

und drei Maispflanzen ausgeführt, begann zu derselben Zeit mit einer 1 p. m. Nährstoff-Lösung von der Zusammensetzung:

$$2\left(\begin{matrix}KaO\\2HO\end{matrix}\right\} PO^6\Big) + \tfrac{1}{2}\,Mn^2O^3,\ PO^5 + CaCl + MgO,\ SO^3 + 2(NH^4O, PO^5).$$

Die Entwicklung der Pflanzen war in allen Stücken wie bei dem vorigen Versuch. Bei

ausgesprochener Chlorose hatten sie am 14. Mai eine Höhe von nur 16—20 Cm.

Pflanze I, die in ihrer Lösung blieb, hatte nach einigen Wochen nur gelbe, welke Blätter, schlaffe, schleimige Wurzeln und konnte ihr Leben nicht weiter fristen.

Mit den Pflänzen II und III wurde ein Kurverfahren eingeleitet, welches von Erfolg gekrönt war. Es bestand in dem, zuerst von Prof. Knop angegebenen Mittel, durch Anwendung gelben Blutlaugensalzes, als einem eisenhaltigen Medicamente, die Bleichsucht zu beseitigen*). Die manganfreie Nährstoff-Lösung erhielt einen Zusatz dieses Salzes, von 0,1 Grm. im Liter.

Die gute Wirkung auf die Ausbildung des grünen Farbstoffs in den Blättern zeigte sich schon nach wenigen Tagen. Zuerst an den Blattnerven, darauf aber auch zwischen diesen, verdrängte das sich bildende Chlorophyll die gelbe Farbe. Die jüngeren Blätter färbten sich ganz grün, die älteren bekamen ein gestreiftes Ansehen.

Indessen brachten es auch diese Pflanzen zu keinem nennenswerthen Zuwachs, so dass sie nur zu einer Höhe von 19 bis 23 Cm. emporwuchsen und eingingen, ohne geblüht zu haben.

Das gelbe Blutlaugensalz bewährte sich auch noch bei einer andern Pflanze, die in einer eisenfreien Lösung gezogen und bleichsüchtig geworden war, als heilkräftiges Mittel. Die grüne Färbung entstand unter Abscheidung von Berlinerblau auf den Wurzeln. Aber auch in diesem Falle lenkte die Pflanze nicht wieder in

*) W. Knop. Bericht der K. Sächs. Gesellsch. der Wissensch. zu Leipzig. 6. Febr. 1869.

ein normales Wachsthum ein, und gelangte nicht zur Blüthe.

In Uebereinstimmung mit Birner und Lucanus haben also die von Wagner mit phosphorsaurem Manganoxydul und Oxyd ausgeführten Vegetations-Versuche gezeigt, dass eine Vertretung des Eisens durch Mangan in den Pflanzen nicht stattfindet, so nahe verwandt, auch sonst beide Metalle sind. Wir müssen vielmehr dem Eisen eine ganz specifische Wirkung im vegetabilischen Haushalt zusprechen, die sich darin zu erkennen giebt, dass nur unter seiner Mitwirkung der für das normale Pflanzenleben unentbehrliche grüne Farbstoff entsteht. Um so interessanter ist dies Verhältniss des Eisens zum Pflanzenleben, als wir ja bereits wissen, dass für die normale Ausbildung der Blutkörperchen das Eisen ebenfalls durchaus nothwendig ist. Eisenhaltige Präparate werden ebensowohl gegen Chlorosis bei Menschen in Anwendung gebracht, als sie ein Mittel sind, die Bleichsucht bei Pflanzen zu heben.

Vegetations-Versuche mit chlorfreier Lösung.

Versuche, welche schon vor acht Jahren Prof. Nobbe und Siegert über die Bedeutung des Chlors im Pflanzenleben anstellten, hatten bewiesen, dass ohne diesen Nährstoff sowohl abnorme Erscheinungen an den vegetativen Organen auftreten, als auch namentlich die Blüthenorgane steril bleiben. Zu den Versuchspflanzen diente Buchweizen. Das Ergebniss jener Versuche wurde von Prof. Leydhecker bestätigt, der ebenfalls mit Buchweizen experimentirte. »So normal auch die Blüthen in ihren einzelnen Thei-

len bei den Pflanzen der chlorfreien Lösung sich entfalteten, so dass kein Unterschied zwischen diesen und den Blüthenorganen der anderen Versuchspflanzen zu bemerken war, so fand dennoch keine Fructification bei denselben statt; die einzelnen Blüthentrauben verwelkten und trockneten ab, ohne dass nach der Hand eine vollkommen ausgebildete Frucht erhalten wurde"*. Dr. Bayer, welcher in Sommer 1867 Erbsen und Hafer in chlorfreier Lösung erzog, bestätigte „die Bemerkung Nobbe's, zu den Versuchen von Lucanus, dass zur Erziehung der Erbse das Chlor nicht fehlen dürfe. Von der Entwicklung der Buchweizenpflanze unterscheidet sich die Erbse beim Wachsen in chlorfreien Lösungen insofern, als die Erscheinungen der gestörten Entwicklung bei letzterer schon viel früher auftreten, während bei ersterer erst zur Zeit der Blüthenbildung die von Nobbe so häufig beobachteten Symtome der Krankheit sich bemerkbar machen" **).

Zu den Versuchen mit Hafer wurden auch solche Samenkörner benutzt, welche von Pflanzen gewonnen waren, die bereits schon ein Mal, im Sommer 1866, in chlorfreien Lösung gewachsen waren. Beyer bemerkt dazu: „Nach dieser letzten Versuchsreihe dürfte es wohl nun gerechtfertigt erscheinen, dem Chlor auch bei der normalen Entwicklung der Haferpflanze eine bestimmte Rolle zuzuschreiben. Der Umstand, dass in chlorfreien Lösungen die Pflanzen dennoch zur Samenbil-

*) Leydhecker. Die Landw. Versuchs-Stationen Bd. VIII. 1866. S. 182.

**) Beyer. Die Landw. Versuchs-Stationen Bd. XI. 1869.

dung gelangen, dürfte wohl darin zu suchen sein, dass schon die geringen Mengen des im Saatgut enthaltenen Chlors vielleicht dazu hinreichend sind"*).

Im Widerspruch zu diesen über das Chlor ausgesprochenen Ansichten, hat Prof. Knop erklärt, dass nach den Ergebnissen seiner Versuche „das Chlor aus der Reihe der, für die Pflanzen nothwendigen Nährstoffe auszuschliessen sei"**). In durchaus chlorfreier Lösung erzog er Sommer 1868 eine Maispflanze von fast 1 Meter Höhe, mit 4 reifen Samen.

Während zwei Buchweizenpflanzen zusammen 23 Stück chlorfreien Samen producirten, blieben andere Buchweizenpflanzen, deren Vegetations-Flüssigkeit 0,25 Grm. Chlorkalium im Liter enthielten, steril.

Von mehr als einem Exemplar chlorfrei gezogener Kresse wurden 40—50 Stück reifer Samen geerntet.

Psamma arenaria gedieh in einer Kieselsäure-, Natron- und Chlorfreien Lösung.

Dr. Wagner hat nun über die streitig gewordene Frage: die Bedeutung der Chlors für das Pflanzenleben betreffend, die folgenden Versuche mit Maispflanzen, welche in einer durchaus chlorfreien Lösung gezogen wurden, angestellt. Sowohl die auf das Sorgfältigste gereinigten zu der Nährstoff-Lösung dienenden Salze, als auch das in Anwendung gebrachte destillirte Wasser erwiesen sich frei von Chlor. Ebenso die benutzten Lösungen, nachdem darin die Pflanzen 14 Tage bis 3 Wochen lang vegetirt hatten.

*) Daselbst. S. 267.

**) W. Koop. Sitzungsberichte der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaft zu Leipzig vom 6. Febr. 1869.

Im Uebrigen hatte die Nährstoff-Lösung die folgende Zusammensetzung:

$$\left.\begin{matrix}KaO\\2HO\end{matrix}\right\} PO^5 + \left.\begin{matrix}2NH^4O\\HO\end{matrix}\right\} PO^5 + \frac{1}{2}CaO, PO^5 + \frac{1}{2}MgO, SO^3 + x Fe^2 O^3, PO^5.$$

Der Versuch, welcher am 1. Mai mit 4 Pflanzen mit einer 1 p. m. Lösung begann, verlief bis zum 26. Mai in normaler Weise. Von da an aber wurde eine Erschlaffung der Blätter und eine anfangende Chlorose derselben bemerkbar. Indessen half ein stärkeres Ansäuern der Lösungen mit einigen Tropfen Phosphorsäure diesem letztern Uebelstande ab. Während der Blüthezeit wurde dies Mittel, die eintretende Alkalescenz der Lösung zu beseitigen, ebenfalls in Anwendung gebracht. Am 8. Juni sahen die Pflanzen bereits wieder vollständig gesund aus. Die am 22. Juni vorgenommenen Messungen ergaben:

Pflanze I. Höhe: 64 Cm. Von den 8 Blättern mass das längste 38 Cm., bei einer Breite von $3^1/_2$ Cm. Die beiden untersten Blätter waren trocken.

Pflanze II. Höhe: 62 Cm. Von den 8 Blättern waren das 1ste und 2te Blatt vertrocknet. Das 5te. Blatt, 42 Cm. lang und 4 Cm. breit, war an der Spitze bis zu 4 Cm. trocken.

Pflanze III. Höhe wie II. Von den 9 Blättern waren die beiden untersten trocken.

Pflanze IV. Höhe 58 Cm. Von den 8 Blättern waren die drei untersten trocken. In den Winkeln der 5. und 6. Blätter, Sprossenbildung.

Am 5. Juli besassen die Pflanzen II und IV. eine vieläsrige Rispe, einige Tage später auch

die beiden andern Pflanzen. Aber die Blüthen waren taub, gänzlich ohne Pollen.

Die weiblichen Blüthenorgene schlugen bei II fehl, bei den übrigen Pflanzen waren sie am 21. Juli entwickelt. Um sie zu befruchten wurde Pollen von Gartenpflanzen benutzt. Nur bei III. entstand eine merkliche Anschwellung des Kolbens.

Bei der Ernte, die am 14. Aug. erfolgte, war

Pflanze I. 98 Cm. hoch und hatte 8 Blätter und 2 Kolben. Davon war der eine rudimentär, der andere enthielt einige unreife Samen.

„ II. 103 Cm. hoch und hatte 8 Blätter, 3 üppige Seitentriebe, keine Kolben.

„ III. 92 Cm. hoch, hatte 9 Blätter und 2 Kolben; der eine mit 5 kleinen reifen Samen. Von 3, die gepflanzt wurden, keimten 2.

„ IV. 89 Cm. hoch, hatte 9 Blätter, 2 Seitensprossen, 1 Kolben. Viele rudimentäre Samenansätze, 6 unreife, nicht keimfähige Samen.

Ueber Ernteegwichte u. s. w. giebt die Tabelle Auskunft.

Beyer hat bei den in chlorfreier Lösung gewachsenen Erbsen eine ungewöhnliche Neigung der Pflanzen zu Sprossenbildung beobachtet. Bei dem in Rede stehenden Mais war dies auch der Fall. Ferner scheinen auch die von Dr. Wagner angestellten Versuche die früher schon dem Chlor zugesprochene Bedeutung für den Fructifications-Process zu bestätigen, da die männlichen Blüthen steril waren und die Kolben viele unentwickelte Samenansätze zeigten.

Tabelle.

Versuchs-Pflanzen	Erntegewicht an Trockensubstanz				Stickstoffgehalt d. Trockensubstanz		Aschengehalt der Trockensubstanz		
	Wurzeln Proc.	Kraut Proc.	Körner Proc.	Ganze Pflanze Proc.	Kraut Proc.	Körner Proc.	Wurzeln Proc.	Kraut Proc.	Körner Proc.
Kreatinlösung Pflz. III.	0.81	14.49	5.20	20.50	2.131	2.264	6.213	6.714	1.562
Chlorfreie Lösung Pflz. I.	1.02	12.34	—	13.36	2.014	—	5.894	6.963	—
„ II.	1.61	18.61	—	20.22	2.241	—	6.741	6.871	—
„ III.	1.24	17.53	1.02	19.97	2.120	—	6.831	6.861	—
„ IV.	0.97	16.84	—	17.81	2.300	—	6.302	7.020	—

Zur Charakteristik der Helikoidflächen.

Von

A. Enneper.

Durchläuft ein fester Punct einer ebenen Curve eine Helix eines Kreiscylinders, während die Ebene der Curve beständig durch die Axe des Cylinders geht, so erzeugt die Curve eine sogenannte Helikoidfläche. Wird die Axe des Cylinders zur Axe der z genommen, so ist die allgemeine Gleichung der Helikoidflächen:

$$z = m \operatorname{arctang} \frac{y}{x} + F(x^2 + y^2),$$

wo m eine Constante bedeutet und $F(r)$ eine beliebige Function von r ist. Die obige Gleichung lässt sich ersetzen durch:

$$x = p \cos w, \quad y = p \sin w, \quad z = mw + q,$$

wo p und q Functionen einer Variabeln v sind, w möge von der Form $gu + f(v)$ sein, wo g eine Constante und $f(v)$ eine Function von v ist. Es ist dann leicht ersichtlich, dass die folgenden Ausdrücke nur von v abhängen.

$$E = \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2,$$

$$F = \frac{dx}{du}\frac{dx}{dv} + \frac{dy}{du}\frac{dy}{dv} + \frac{dz}{du}\frac{dz}{dv}.$$

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{du^2}, & \frac{d^2y}{du^2}, & \frac{d^2z}{du^2} \\ \frac{dx}{du}, & \frac{dy}{du}, & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv}, & \frac{dy}{dv}, & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix} = A, \quad \begin{vmatrix} \frac{d^2x}{dv^2}, & \frac{d^2y}{dv^2}, & \frac{d^2z}{dv^2} \\ \frac{dx}{du}, & \frac{dy}{du}, & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv}, & \frac{dy}{dv}, & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix} = B,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{du\,dv}, & \frac{d^2y}{du\,dv}, & \frac{d^2z}{du\,dv} \\ \frac{dx}{du}, & \frac{dy}{du}, & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv}, & \frac{dy}{dv}, & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix} = C.$$

Nimmt man umgekehrt an, dass E, F, G, A, B, C nur von einer der Variabeln u oder v abhängig sind, so ist dadurch eine Helikoidfläche characterisirt. Da dieser Satz für die allgemeine Theorie der Flächen nicht ohne Bedeutung zu sein scheint, so soll eine kurze Herleitung gegeben werden. Sind E, F, G, A, B, C nur von v abhängig, so hat man folgende Gleichungen:

1) $$(EG - F^2)\frac{d^2x}{du^2} = A\left(\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv} - \frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(E\frac{dx}{dv} - F\frac{dx}{du}\right)\frac{dE}{dv}$$

$$2)\quad \begin{aligned}(EG-F^2)\frac{d^2x}{du\,dv} &= C\left(\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv}-\frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}\right)\\ &+\frac{1}{2}\left(G\frac{dx}{du}-F\frac{dx}{dv}\right)\frac{dE}{dv},\end{aligned}$$

$$3)\quad \begin{aligned}(EG-F^2)\frac{d^2x}{dv^2} &= B\left(\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv}-\frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}\right)\\ &+\frac{1}{2}\left(E\frac{dx}{dv}-F\frac{dx}{du}\right)\frac{dG}{dv}+\left(G\frac{dx}{du}-F\frac{dx}{dv}\right)\frac{dF}{dv}.\end{aligned}$$

$$4)\quad \begin{aligned}\frac{d}{du}\left\{\frac{\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv}-\frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}}{\sqrt{(EG-F^2)}}\right\} &= \frac{CF-AG}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{dx}{du}\\ &-\frac{CE-AF}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{dx}{dv}\end{aligned}$$

$$5)\quad \begin{aligned}\frac{d}{dv}\left\{\frac{\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv}\frac{dy}{dv}-\frac{dz}{du}}{\sqrt{(EG-F^2)}}\right\} &= \frac{CF-BE}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{dx}{dv}\\ &-\frac{CG-BF}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{dx}{du}.\end{aligned}$$

Bildet man aus 1) und 2) den doppelten Werth von $\frac{d^3x}{du^2\,dv}$, setzt beide Werthe einander gleich, so müssen in der resultirenden Gleichung die Factoren von:

$$\frac{dy}{du}\frac{dz}{du}-\frac{dy}{dv}\frac{dz}{du},\quad E\frac{dx}{dv}-F\frac{dx}{du},$$

einzeln verschwinden. Analoges gilt für die Gleichung, welche man durch Bildung der beiden Werthe von $\frac{d^3x}{du\,dv^2}$ aus 2) und 3) erhält. Hierdurch ergeben sich folgende Gleichungen:

$$6)\quad \frac{d}{dv}\left(\frac{A}{\sqrt{(EG-F^2)}}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{AG+BE-2CF}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{dE}{dv},$$

7)

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{C}{\sqrt{(EG-F^2)}}\right)=\frac{1}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}\left[(AG-CF)\frac{dF}{dv}\right.$$

$$\left.-\tfrac{1}{2}(CG-BF)\frac{dE}{dv}+\tfrac{1}{2}(CE-AF)\frac{dG}{dv}\right],$$

$$8)\quad \frac{1}{2}\,\frac{d}{dv}\left(\frac{\frac{dE}{dv}}{\sqrt{(EG-F^2)}}\right)+\frac{AB-C^2}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

Aus 6) und 7) folgt:

$$\frac{d}{dv}\,\frac{CE-AF}{EG-F^2}=0,$$

d. i.:

$$9)\qquad \frac{CE-AF}{EG-F^2}=h,$$

wo h eine Constante bedeutet. Die Gleichungen 1), 2) und 4) geben:

$$\frac{C\frac{d^2x}{du^2}-A\,\frac{d^2x}{du\,dv}}{\sqrt{(EG-F^2)}}=\frac{d}{du}\left(\frac{\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv}-\frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}}{\sqrt{(EG-F^2)}}\right)\frac{1}{2}\,\frac{dE}{dv}.$$

Bedeutet ξ eine Function von v, so folgt durch Integration nach u:

$$10)\quad \frac{C\frac{dx}{du}-A\frac{dx}{dv}}{\sqrt{(EG-F^2)}}-\frac{\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv}-\frac{dy}{du}\frac{dz}{du}}{\sqrt{(EG-F^2)}}\frac{1}{2}\frac{dE}{dv}= \xi\sqrt{(EG-F^2)}\cdot$$

Da die rechte Seite der vorstehenden Gleichung nur von v abhängt, so ist zur Vereinfachung des Folgenden $\xi\sqrt{(EG-F^2)}$ statt ξ gesetzt. Bildet man aus 10) den Werth von $\frac{d\xi}{dv}$, so folgt mittelst der Gleichungen 2), 3), 5), 6), 7) und 8): $\frac{d\xi}{dv}=0$, d. h. ξ ist eine Constante. Sind ξ, ζ, η Constanten, so hat man folgenden Gleichungen:

$$11)\begin{cases} C\frac{dx}{du}-A\frac{dx}{dv}-(\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv}-\frac{dy}{dv}\frac{dz}{dn})\frac{1}{2}\frac{dE}{dv}=\xi(EG-F^2),\\ C\frac{dy}{du}-A\frac{dy}{dv}-(\frac{dz}{du}\frac{dx}{dv}-\frac{dz}{dv}\frac{dx}{du})\frac{1}{2}\frac{dE}{dv}=\eta(EG-F^2),\\ C\frac{dz}{du}-A\frac{dz}{dv}-(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du})\frac{1}{2}\frac{dE}{dv}=\zeta(EG-F^2). \end{cases}$$

Diese Gleichungen geben:

$$12)\quad \begin{vmatrix} \xi, & \eta, & \zeta \\ \frac{dx}{du}, & \frac{dy}{du}, & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv}, & \frac{dy}{dv}, & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{dE}{dv}.$$

Die Gleichungen 11) respective mit $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$, $\frac{dz}{du}$ multiplicirt und addirt geben nach 9):

$$\xi\frac{dx}{du} + \eta\frac{dy}{du} + \zeta\frac{dz}{du} = h.$$

Bedeutet V eine Function von v, so folgt durch Integration:

$$13)\quad \xi x + \eta y + \zeta z = hu + V.$$

Die Gleichung 12) zeigt, dass der Cosinus des Winkels, welchen die Normale im Puncte (x, y, z) mit einer festen Richtung bildet, nur von v abhängt. Wird die feste Richtung zur Axe der z genommen, so ist $\xi = 0$, $\eta = 0$. Man kann $\zeta = 1$ setzen, was darauf hinauskommt in der Gleichung 12) statt der willkührlichen Constanten h und der willkührlichen Function V zwei andere arbiträre Quantitäten zu nehmen, welche ζ als Factor enthalten. Für $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 1$ giebt die Gleichung 13):

$$14)\quad z = hu + V.$$

Setzt man diesen Werth von z in die Gleichungen für E, G, F, so folgt, $\frac{dV}{dv} = V'$ gesetzt:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = E - h^2, \quad \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 = G - V'^2,$$

$$\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv'} + \frac{dy}{du}\frac{dy}{dv} = F - hV'.$$

Diese Gleichungen lassen sich ersetzen durch:

$$15)\quad \begin{cases} \frac{dx}{du} = -\sqrt{(E-h^2)}\,\sin w, \\ \frac{dx}{dv} = \sqrt{[G - V'^2 \frac{(F-hV')^2}{E-h^2}]}\,\cos w \\ \qquad - \frac{F - hV'}{\sqrt{E-h^2}}\,\sin w, \end{cases}$$

$$16)\quad \begin{cases} \frac{dy}{du} = \sqrt{(E-h^2)}\,\cos w \\ \frac{dy}{dv} = \sqrt{[G - V'^2 \frac{(F-hV')^2}{E-h^2}}\,\sin w \\ \qquad + \frac{F - hV'}{\sqrt{E-h^2}}\,\cos w. \end{cases}$$

Diese Gleichungen geben:

$$17)\quad \begin{cases} \frac{d\sqrt{E-h^2}}{dv} = \frac{dw}{du}\sqrt{[G - V'^2 - \frac{(F-hV')^2}{E-h^2}]} \\ \frac{dw}{dv} = \frac{dw}{du}\,\frac{F-hV'}{E-h^2}. \end{cases}$$

Wegen dieser Gleichungen sind $\frac{dw}{du}$ und $\frac{dw}{dv}$

nur von v abhängig, hieraus folgt $\frac{d^2w}{dudv} = 0$, d. h. $\frac{dw}{du} = g$, wo g eine Constante bedeutet. Die zweite Gleichung 17) giebt dann:

$$18) \qquad w = gu + g\int \frac{F - hV'}{E - h^2}\, dv.$$

Mit Weglassung von Constanten, welche sich nur auf eine Verlegung des Anfangspuncts der Coordinaten beziehn, geben die Gleichungen 15), 16), 17) und 18):

$$x = \frac{\sqrt{E - h^2}}{g} \cos w$$

$$y = \frac{\sqrt{E - h^2}}{g} \sin w.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{\sqrt{E - h^2}}{g} = p, \quad V - \int \frac{F - hV'}{E - h^2}\, dv = q, \quad \frac{h}{g} = m,$$

so geben die Gleichungen 14) und 19):

$$x = p\cos w, \quad v = p\sin w, \quad z = mw + q,$$

durch welche Gleichungen die Helikoidflächen bestimmt sind.

Der obige Satz bleibt noch gültig wenn E, F, G, A, B, C Functionen von v_1 sind, wo $v = \varphi\,(au + bv)$ ist. Durch Umkehrung folgt $au + bv = f\,(v_1)$. Nimmt hierzu $u = gu_1 + f_1\,(v_1)$, so folgt: $u = gu_1 + V_1$, $v = hu_1 + V_2$, wo g, h Constanten, V_1, V_2 Functionen von v_1 sind. Führt man in E, F, G, A, B, C statt u, v die Quantitäten u_1, v_1 ein, so mögen die bemerkten Grössen übergehen in E_1, F_1, G_1, A_1, B_1, C_1, welche nur von v_1 abhängen. Die Gleichungen 1), 2), 3), 4), 5) bleiben dann auch für die Variabeln u_1 und v_1 gültig, man hat also, abgesehn von der Bezeichnung, genau die obige Deduction zu wiederholen.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

Juli 20. **№ 16.** 1870.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Fortgesetzte Untersuchungen über den elektrisirten Sauerstoff.

Eine vorläufige Mittheilung

von

G. Meissner.

Es ist eine wohlbekannte Thatsache, dass trockner Sauerstoff in Folge der Einwirkung elektrischer Spannung eine Volumabnahme erleidet: das auf Normaldruck und 0° reducirte Volumen des Sauerstoffs nach der Elektrisirung ist kleiner, als vor derselben. Man kann, ohne schon etwas über das Wesen dieser Erscheinung auszusagen, diese Volumabnahme oder Contraction bezeichnen als die mechanische Wirkung der Veränderung, welche der Sauerstoff durch das Elektrisiren erleidet, und ein Maass für die Grösse dieser mechanischen Wirkung ist gegeben in der nach Raumtheilen gemessenen Grösse der Volumabnahme oder in dem Gewicht eines dieser Contractionsgrösse gleichen Sauerstoffvolums bei Normaldruck und 0°.

Der Sauerstoff erlangt durch das Elektrisiren ausserdem eine Steigerung seiner chemischen Wirksamkeit auf oxydationsfähige Körper: manche von solchen, auf welche unter gewöhnlichen Umständen der nicht-elektrisirte Sauerstoff gar nicht oder in kaum merklichem Grade einwirkt, werden von dem elektrisirten Sauerstoff unter denselben Umständen oxydirt, andere, welche schon unter

gewöhnlichen Umständen in merklichem Maasse von nicht-elektrisirtem Sauerstoff oxydirt werden, nehmen unter den gleichen Umständen vom elektrisirten Sauerstoff eine grössere Gewichtsmenge auf. Man kann den Inhalt des Apparats, in welchem der Sauerstoff der Elektrisirung unterworfen wurde, nach Messung der mechanischen Wirkung der dadurch erlittenen Veränderung, durch ein System von Vorlagen leiten, in welchen an einer dazu geeigneten oxydirbaren Substanz, einem Reductionsmittel, die ganze chemische Wirksamkeit des elektrisirten Sauerstoffs zur Wirkung gelangt und die dabei gebildeten Oxydationsprodukte zurückgehalten werden, so dass, wenn auch noch dafür gesorgt ist, dass das Gas diese Vorlagen schliesslich eben so trocken verlässt, wie es eintrat, nur solcher Sauerstoff, von genau derselben ursprünglichen Beschaffenheit wie er der Einwirkung der Elektricität unterworfen wurde, entweicht. Wenn dann, durch Parallelversuche ermittelt, die Grösse derjenigen chemischen Wirkung berücksichtigt wird, welche für die gewählten Versuchsbedingungen dem gewöhnlichen, nicht-elektrisirten Sauerstoff zukommt, so gewinnt man aus der Gewichtszunahme des Systems von Absorptionsapparaten das Maass für die chemische Wirkung der Veränderung, welche der Sauerstoff durch das Elektrisiren erleidet, welches Maass direct vergleichbar ist mit obigem Maass für die Grösse der mechanischen Wirkung.

Ich nenne, der Kürze des Ausdrucks halber, das Verhältniss der Grösse der chemischen Wirkung zu der Grösse der mechanischen Wirkung des elektrisirten Sauerstoffs den Wirkungsquotienten.

Für die Frage nach dem Wesen der Verän-

derung, welche der Sauerstoff durch das Elektrisiren erleidet, ist es von fundamentaler Bedeutung zu wissen, ob dieser Wirkungsquotient eine unter allen Umständen constante Grösse ist oder nicht.

Ich erinnere hier nur kurz daran, dass bei den bisherigen die Grösse jenes Wirkungsquotienten betreffenden Untersuchungen anderer Forscher die Constanz dieses Werthes in so fern stillschweigend vorausgesetzt wurde, als keine auf die Prüfung dieser Annahme gerichtete absichtliche Variation der Bedingungen vorgenommen wurde, und dass in diesen Versuchen der Werth selbst als annähernd der Einheit gleich gefunden wurde, während aus einer kleinen Reihe vorläufiger Versuche, welche am Schluss der im vorigen Jahre der königl. Societät vorgelegten Abhandlung von mir mitgetheilt wurden, wesentlich abweichende, nämlich grössere Werthe für den Wirkungsquotienten resultirten, eine Differenz der Befunde, die indessen, wie in der genannten Abhandlung nachgewiesen wurde, zum Theil schon dadurch erklärlich war, dass bei einem Theil der früheren Untersuchungen die Grösse der chemischen Wirkung nicht durch die Wage sondern durch ein unter hier in Betracht kommenden Umständen unzulässiges Titrirverfahren fehlerhaft bestimmt worden war. —

Das Ergebniss einer Reihe sehr zahlreicher (nahe an 300 betragender) Versuche, welches ich in dieser vorläufigen Mittheilung zur Kenntniss zu bringen mir erlaube, ist dieses, dass der Wirkungsquotient für den elektrisirten Sauerstoff keine Constante ist, sondern eine von vielen Variablen abhängige Grösse.

Die Momente, welche, so weit meine Untersuchungen bisjetzt reichen, die Grösse des

Wirkungsquotienten bestimmen, sollen im Folgenden kurz bezeichnet werden.

Zuerst muss das zur Aufnahme der chemischen Wirkung des elektrisirten Sauerstoffs angewendete Reductionsmittel genannt werden. Es giebt eine ganze Reihe von Substanzen, welche der oben genannten Bedingung genügen, die ganze chemische Wirksamkeit des elektrisirten Sauerstoffs zu vernichten, indem sie sich auf Kosten derselben oxydiren — anders, den bisherigen Anschauungen entsprechend, ausgedrückt, sämmtliches durch Elektrisiren erzeugtes Ozon und Antozon zu absorbiren: es hat aber im Allgemeinen der Wirkungsquotient für jedes Reductionsmittel unter übrigens gleichen Umständen einen besondern Werth, was nicht ausschliesst, dass er für einzelne Reductionsmittel nahezu oder gradezu gleich ist. Man erhält, wie oben bemerkt unter Berücksichtigung der oxydirenden Wirkung des nicht-elektrisirten Sauerstoffs, auf die gleiche Grösse der mechanischen Wirkung unter sonst gleichen Umständen sehr differente Gewichtszunahmen der Absorptionsapparate je nach der Wahl des Reductionsmittels. Entsprechende Differenzen zeigen sich auch, wenn man solche Reductionsmittel anwendet, welche aus dem elektrisirten Sauerstoff nur das Ozon absorbiren, nicht auch zugleich das Antozon. Ohne hier schon auf Einzelheiten einzugehen bemerke ich, dass der Werth des Wirkungsquotienten je nach der Art des Reductionsmittels, unter Einhaltung gewisser Bedingungen im Uebrigen, der Einheit gleich sein kann, meistens aber grösser ist, z. B. annähernd = $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 5; da aber noch andere Momente die Grösse des Wirkungsquotienten beeinflussen, so haben solche Zahlen nur eine relative Bedeutung,

und auch diese wahrscheinlich nur in beschränktem Sinne.

Bei der grossen Manchfaltigkeit der übrigen variablen Versuchsbedingungen, welche ausser dem eben erörterten Momente geprüft werden, mussten, konnte für die den folgenden Angaben zum Grunde liegenden Versuche bisher nur ein Reductionsmittel in Anwendung gebracht werden, das Jodkalium. Der Umstand, dass das Jodkalium in wässriger Lösung nicht die ganze chemische Wirksamkeit des elektrisirten Sauerstoffs vernichtet resp. an sich zur Geltung kommen lässt, sofern dasselbe nur das Ozon absolut vollständig absorbirt, ist für die jetzt in Frage kommenden Versuche gleichgültig.

Wendet man zur Desozonisation des elektrisirten Sauerstoff das Jodkalium in Lösungen von sehr geringer Concentration an, so erweist sich die Temperatur, bei welcher die chemische Wirksamkeit des elektrisirten Sauerstoffs zur Geltung gebracht wird, als von Einfluss auf die Grösse des Wirkungsquotienten: derselbe kann bedeutend kleiner ausfallen, wenn das Gas auf 0° oder unter 0° abgekühlt und zugleich die sehr verdünnte Jodkaliumlösung mit Eis umgeben ist, als wenn die Absorption bei mittlerer Temperatur der Luft stattfindet. Bei Lösungen höherer Concentration konnte ein Einfluss der Temperatur auf die Grösse des Wirkungsquotienten nicht bemerkt werden. Demnach ist also auch die Concentration der desozonisirenden Jodkaliumlösung von Einfluss auf die Grösse dieses Quotienten, derselbe sinkt merklich mit der Concentration, sobald diese unter eine gewisse Gränze gelangt ist, und zwar zeigt sich dieser Einfluss nicht nur bei, wie oben gedacht, sehr niederer Temperatur, sondern auch noch dann, wenn man die

Oxydation bei der mittlern Lufttemperatur zu Stande kommen lässt.

Wenn man den Inhalt des ganz durch Glas begränzten Apparates, in welchem der Sauerstoff elektrisirt wurde, durch einen Strom eben so trocknen gewöhnlichen Sauerstoffs durch die Absorptionsapparate austreibt, so kann dies mit grösserer oder geringerer Geschwindigkeit geschehen, und man gewährt damit dem elektrisirten Sauerstoff kürzere oder längere Zeit mit dem nachströmenden gewöhnlichen Sauerstoff in Berührung zu bleiben, sich mit diesem zu mischen, ehe jener zur Absorption gelangt, man lässt je nach der Geschwindigkeit des Gasstroms den elektrisirten Sauerstoff mit geringeren oder grösseren Mengen gewöhnlichen Sauerstoffs gemischt zur Wirkung auf die Jodkaliumlösung kommen: diese Differenzen im Versuchsverfahren sind nicht gleichgültig für die Grösse des Wirkungsquotienten, derselbe ist im Allgemeinen grösser, wenn der elektrisirte Sauerstoff rasch und in Folge dessen mit der möglichst kleinen Menge gewöhnlichen Sauerstoffs ausgetrieben wird, so dass der austreibende gewöhnliche Sauerstoff jenen gleichsam vor sich her treibt, möglichst wenig in denselben diffundirt.

Variabel ist ferner die Zeit, welche man verstreichen lässt zwischen Beendigung der Elektrisirung des Sauerstoffs und dem Austreiben um die chemische Wirkung einzuleiten, und während dieser Zeit bleibt der elektrisirte Sauerstoff nicht unverändert. Schon früher habe ich mitgetheilt, dass wenn der elektrisirte Sauerstoff feucht ist, sehr rasch das, was man seine Quantität nennt, abnimmt, d. h. prüft man von Zeit zu Zeit in der früher angegebenen Weise das Volumen des elektrisirten Sauerstoffs, so

zeigt sich bei Gegenwart von Wasserdampf eine rasche Zunahme des Volums, ein rasches mit abnehmender Geschwindigkeit erfolgendes Verschwinden der zuerst bewirkten Contraction. Diese Erscheinung zeigt sich in viel geringerm Maasse auch an dem völlig trocken in Glas aufbewahrten elektrisirten Sauerstoff, wie meine in mehrfacher Beziehung bedeutend verbesserten Versuchsvorrichtungen mir jetzt wahrzunehmen gestatten: es sinkt während der Aufbewahrung des trockenen elektrisirten Sauerstoffs mit abnehmender Geschwindigkeit und nicht unter allen Umständen in gleicher Weise sowohl die Grösse der mechanischen Wirkung, wie die der chemischen, aber nicht immer sinken beide im gleichen Verhältniss, d. h. es kann sich auch die Grösse des Wirkungsquotienten während der Aufbewahrung ändern. Eine gewisse Umbestimmtheit, welche ich vorstehendem Satze gebe, ist darin begründet, dass auf diese Veränderung des Wirkungsquotienten von Einfluss zu sein scheint die Art und Weise, wie der Sauerstoff elektrisirt wurde, sofern nämlich dies sowohl hinsichtlich der Grösse der zum Elektrisiren angewendeten Spannung, wie hinsichtlich der Dauer des Elektrisirens veränderlich ist. Die diesen Punkt betreffenden Verhältnisse sind verwickelt und können in dieser kurzen Mittheilung nicht weiter erörtert werden.

Das Moment, welches bei dem vorstehend berührten Abhängigkeitsverhältniss des Wirkungsquotienten schon als ein in Betracht kommendes erwähnt wurde, nämlich die Art und Weise, wie der Sauerstoff elektrisirt wurde, welches Maass von Spannung und wie lange Zeit dasselbe wirkte, ist auch dann nicht gleichgültig für die Grösse des Wirkungsquotienten, wenn man den elektrisirten Sauerstoff nicht länger

aufbewahrt vor Ablösung seiner mechanischen und Einleitung seiner chemischen Wirkung, als nöthig ist zur Ausgleichung der beim Elektrisiren stattfindenden Erwärmung.

Endlich ein letztes Moment, welches auf die Grösse des Wirkungsquotienten bestimmend mit einwirken kann, zeigt sich, wenn man sich verschiedener Apparate zu den Versuchen bedient. Die dieser Mittheilung zum Grunde liegenden Versuche sind angestellt worden mit 9 verschiedenen Apparaten. Diese sind im Princip sämmtlich gleich dem in meiner oben genannten Abhandlung beschriebenen, jedoch in der Beziehung bedeutend vervollkommnet, dass sie viel genauer die Temperatur und den Druck des eingeschlossenen Gases zu messen gestatten, und dass sie meistens sehr bedeutend grösser sind und die Erzeugung von viel mehr elektrisirtem Sauerstoff ermöglichen, als der frühere erste derartige Apparat. Ausserdem aber sind, was hier in Betracht kommt, die Apparate darin unter sich verschieden, dass theils das Verhältniss der Grösse der Flächen, auf welcher sich die Inductionselektricitäten verbreiten, zu der Grösse des Volums der Apparate resp. zu der Grösse des Sauerstoffvolums verschieden gewählt wurde, theils durch Differenzen in der Form der Apparate Verschiedenheiten der Anordnung des Sauerstoffs in Bezug auf die Fläche, von welcher die Elektrisirung ausgeht, hergestellt wurden, so dass z. B. in dem einen Apparat das ganze Sauerstoffvolum oder der beiweitem grösste Theil desselben mit geringer Dicke der Schicht, daher mit geringem Maximalabstande, jene Fläche umgiebt, in einem andern Apparat dagegen ein grösserer Theil des Sauerstoffvolums Räume erfüllt, die in grösseren Entfernungen von jener Fläche ge-

legen sind, und somit in dem einen Falle fast das gesammte Sauerstoffvolum bei Anwendung der geeigneten Spannung noch innerhalb des unmittelbaren Wirkungsbereichs jener Fläche sich befindet, im andern Fall ein grosser Theil des Sauerstoffs weit ausserhalb dieses unmittelbaren Wirkungsbereichs sich befindet. Auch diese Differenzen in den Versuchsbedingungen sind nicht ohne Einfluss auf die Grösse des Wirkungsquotienten, derselbe hat, bei Vergleichbarkeit im Uebrigen, im Allgemeinen für jeden in genannter Weise besondern Apparat seinen besondern Werth.

Füge ich schliesslich noch hinzu, dass auf die Grösse der Wirkung, welche das Elektrisiren mit bestimmter Spannung und eine bestimmte Zeit hindurch hat, — Momente, die als bestimmende für den Wirkungsquotienten oben genannt wurden — wiederum die Temperatur und die Dichtigkeit des Sauerstoffs von grossem Einfluss sind, so ergiebt sich, dass in der That die Grösse jenes Wirkungsquotienten von allen Bedingungen, welche bei Anstellung solcher Versuche, um die es sich hier handelt, variabel sind, in mehr oder weniger bedeutendem Grade abhängig ist.

Indem ich die ausführliche Darstellung der den vorstehenden Sätzen zum Grunde liegenden Untersuchungen demnächst in einer Abhandlung der königl. Societät vorzulegen gedenke, soll hier nur noch die Schlussfolgerung mitgetheilt werden, welche sich aus der Abhängigkeit der Grösse des Wirkungsquotienten von so vielen Veränderlichen ergiebt.

Die Veränderung, welche der Sauerstoff durch das Elektrisiren erfährt, besteht nicht darin, dass ein durch — der Zahl der Atome

nach — veränderte Constitution der Gasmoleküle characterisirter neuer Körper entsteht, welcher, sofern aus umgestalteten Molekülen bestehend gedacht, so zu sagen körperlich, substanziell von dem gewöhnlichen Sauerstoff verschieden wäre, und dessen Auftreten oder Entstehen mit einer Verminderung der Anzahl von Gasmolekülen verbunden wäre, welche Verminderung die Volumabnahme des elektrisirten Sauerstoffs unter Aufrechterhaltung des nach Avogadro benannten Satzes erklären sollte: denn, wenn in dem der Elektrisirung unterworfenen Sauerstoff ein solchergestalt zu definirender neuer, wie es vielfach zur Veranschaulichung geschah z. B. dem Chlor als ein concretes Ding verglichener, ein bestimmtes chemisches Aequivalent repräsentirender Körper enthalten wäre, so müsste die Grösse, die ich oben als Wirkungsquotient definirt habe, eine Constante sein.

Es besteht vielmehr die Veränderung, welche der Sauerstoff durch das Elektrisiren erfährt, darin, dass der Molekularbewegungszustand der Sauerstofftheilchen einer derartigen Aenderung unterliegt, dass daraus bei gleichbleibender Temperatur eine Verminderung der lebendigen Kraft, mit welcher die Gasmoleküle in Bewegung gegen einander begriffen sind, und damit des Druckes, welchen sie auf die begrenzende Wand ausüben, resultirt. Der Satz, dass alle Gase bei demselben Druck und derselben Temperatur gleichviel Moleküle in der Volumeinheit enthalten muss für den Sauerstoff eine Ausnahme erleiden, der Sauerstoff enthält im elektrisirten Zustande bei demselben Druck und derselben Temperatur eine grössere Anzahl von Molekülen in der Volumeinheit, als der nicht-elektrisirte in Folge einer durch das Elektrisiren bewirk-

ten Veränderung des Molekularbewegungszustandes.

Es wird damit für den Sauerstoff, und zwar nur für dieses Gas (zugleich dem einzigen, welches allen anderen Gasen gegenüber sich magnetisch verhält) behauptet, dass unter der Einwirkung elektrischer Spannung, durch elektrische Influenz die Gasmoleküle eine gegenseitige Anziehung erlangen, wie sie als nicht mehr verschwindend klein bei chemisch differenten Gasmolekülen ebenfalls als möglich oder denkbar wenigstens in Betracht gezogen werden kann. Dass in der That durch das Elektrisiren und zwar nicht durch elektrische Entladung, nicht durch sich bewegende Elektricität, sondern durch die elektrische Spannung, als Vertheilungswirkung zwei verschiedene zu einander in chemischer Beziehung stehende Sauerstoffszustände, die als Ozon und Antozon bezeichnet werden, entstehen, habe ich früher nachgewiesen, und verweise ich in dieser Beziehung namentlich auf die oben genannte Abhandlung.

Mit jener Aenderung des Molekularbewegungszustandes resp. mit der den Sauerstoffmolekülen durch das Elektrisiren ertheilten gegenseitigen Anziehung ist zugleich die Steigerung der Affinität zwischen dem Sauerstoff und den verbrennlichen Molekülen gegeben, denn nur eine Steigerung der Anziehung ist es, um die es sich handelt, da eine, wenn auch oft für sonst gleiche Umstände viel schwächere, Affinität auch zwischen denselben verbrennlichen Molekülen und dem nicht-elektrisirten Sauerstoff besteht.

Wie viel aber an einer verbrennlichen Substanz unter Benutzung und Verbrauch der ganzen Summe von Kraft, die durch das Elektrisiren dem Sauerstoff ertheilt wurde, mit dieser Summe aus-

gerichtet, geleistet wird an Oxydation, d. h. welches Gewicht Sauerstoff vermöge der Wirkung des Elektrisirens der verbrennlichen Substanz einverleibt wird, das hängt nicht nur von der an ihrer mechanischen Wirkung (Verminderung der lebendigen Kraft der Gasmoleküle) bemessenen Grösse des dem Sauerstoff angehörenden Antheils von dem, was man Affinität — hier Affinitätssteigerung — nennt, ab, sondern auch von dem ergänzenden Antheil, welchen die verbrennliche Substanz besitzt, und da dieser Antheil, dieser Beitrag zu der Wirkung, deren Resultat die chemische Verbindung ist, im Allgemeinen für jede Substanz einen besondern Werth hat, so folgt die Abhängigkeit des Wirkungsquotienten von den Eigenschaften des zur Absorption angewendeten Reductionsmittels: wie viel die durch das Elektrisiren dem Sauerstoff ertheilte Veränderung als Affinitätssteigerung zur Oxydation werth ist, wird mit bestimmt durch die Eigenschaften der Substanz, an welcher man dieselbe zur Geltung kommen lässt; und so wie Temperatur und Concentration von Lösungen im Allgemeinen von Einfluss sind auf das Maass von chemischer Wirkung zwischen verschiedenen Substanzen, so sind der entwickelten Anschauung nach Aenderungen dieser allgemeinen Bedingungen auch von Einfluss auf die Grösse der chemischen Wirkung des elektrisirten Sauerstoffs.

Die Wahrnehmungen, auf welche sich die übrigen oben namhaft gemachten Abhängigkeitsverhältnisse des Wirkungsquotienten beziehen, führen, so weit ich bisjetzt übersehen kann, mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit zu dem Schluss, dass die Sauerstofftheilchen durch das Elektrisiren je nach der Stärke der angewendeten Spannung und nach der Zeitdauer der Wirkung so

wie auch nach der Entfernung von der elektrisirten (und auf den Sauerstoff wiederum elektrisirend wirkenden) Fläche in verschiedenen Graden afficirt werden können, dass es nicht einen einzigen der Intensität nach bestimmten elektrisirten Zustand des Sauerstoffs giebt, sondern, dass man schwächere und stärkere Elektrisirungsgrade an einem Sauerstoffmolekül unterscheiden und je nach Umständen herstellen kann, und dass eine vielleicht langsame Mittheilung jener Aenderung des Molekularbewegungszustandes von Molekül zu Molekül stattfindet. Die dem Sauerstoff durch das Elektrisiren ertheilte Veränderung ist nicht die sprungweise erfolgende Überführung in einen einzelnen bestimmten neuen Zustand, sondern besteht in dem Durchlaufen einer stetigen Reihe von Uebergängen, auf deren jedem ein Beharren möglich ist.

Die Curve nun, welche darstellt, wie mit von Null an wachsendem Maasse der Elektrisirung eines Sauerstoffmoleküls die chemische Affinität zu den verbrennlichen Molekülen steigt, fällt — abgesehen davon, dass sie möglicherweise nicht für jedes Reductionsmittel die gleiche ist — wahrscheinlich nicht mit der Curve zusammen, welche darstellt, wie die in der Druckverminderung sich äussernde mechanische Wirkung steigt: die erstere Curve steigt wahrscheinlich zuerst langsamer, als die zweite, für mittlere Grade des elektrisirten Zustandes rascher, als diese, und endlich wieder langsamer, so dass der Wirkungsquotient ein Maximum hat bei mittleren Graden der durch das Elektrisiren dem Sauerstoffmolekül ertheilten Veränderung.

Man hat den elektrisirten Sauerstoff, das Ozon und Antozon, oft als „allotropischen“ Sauerstoff bezeichnet: dieser Ausdruck ist offenbar

nicht mehr geeignet, der elektrisirte Sauerstoff wird ebensowenig so bezeichnet werden können, wie erhitzter Sauerstoff eine Allotropie des minder warmen genannt werden kann. In der Gewichtszunahme eines Reductionsmittels, welches Ozon absorbirt hat, wägt man nicht Gewichtsmengen eines vor der Absorption als concretes Ding vorhandenen besondern Körpers, sondern man wägt die Mengen von gewöhnlichem Sauerstoff, welche vermöge einer durch das Elektrisiren auf das Gas übertragenen Kraft aufgenommen wurden, so wie man in der Gewichtszunahme eines bei hoher Temperatur sich oxydirenden Körpers auch nur die Gewichtsmenge des einen gewöhnlichen Sauerstoffs wägt, welche vermöge der durch die Wärme gesteigerten Affinität aufgenommen wurde.

Wenn vom Standpunkte der frühern Anschauung aus die Aufgabe gestellt werden konnte, es dahin zu bringen, „reines" Ozon und Antozon darzustellen, so ist diese Aufgabe jetzt in so fern gegenstandlos geworden, als beim Elektrisiren reinen Sauerstoffs immer reines Ozon und Antozon erhalten wird, und es den elektrisirten Sauerstoff in keinem andern Sinne „rein" giebt, als in dem, in welchem es reinen Sauerstoff von einer bestimmten Temperatur giebt. Was man aber — wie gesagt mit vollem Recht der frühern Anschauung nach — eigentlich bei jener Aufgabe im Sinne hatte, erweis't sich jetzt als in gewisser Weise analog dem Wunsche nach einer Isolirung des Wärmestoffs früherer Zeiten. In gewisser Weise vergleichbar der Wandlung der Anschauung vom Wesen der Wärme wird sich eine Wandlung der Ozontheorie vollziehen, an Stelle der bisherigen so zu sagen stofflichen Ozontheorie wird auch hier die mechanische treten.

Schliesslich bemerke ich noch, dass der be-

reits oben erwähnte bedeutende Einfluss, welchen Temperatur und Dichtigkeit des Sauerstoffs auf die Grösse der Wirkung haben, die durch das Elektrisiren mit bestimmter Spannung und von bestimmter Dauer erzielt wird, darin besteht, dass die an der Volumabnahme gemessene Quantität der Wirkung der Dichtigkeit des Sauerstoffs annähernd proportional wächst und unabhängig davon um so grösser ist, je niederer die Temperatur, bei welcher die Elektrisirung stattfindet.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Mai und Juni.

(Fortsetzung.)

Nature, Nr. 27—34. (= Vol. I).
Annalen der königl. Sternwarte bei München. Bd. XVII. München 1869. 8.
Verzeichniss von 4793 telescopischen Sternen zwischen — 3° und — 9° Declination. (IX. Supplementband zu den Annalen der Münchener Sternwarte). München 1869. 8.
C. A. F. Peters, Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher. Bd. I—VI. Altona 1860—65. 8.
G. van der Mensbrugghe, sur la tension superficielle des liquides etc. Premier mémoire. Bruxelles 1869. 4.
— — sur la viscosité superficielle des lames de solution de saponie. Ebd. 1870. 8.
Sitzungsberichte der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften zu München. 1869. II. Heft III. IV. — 1870. I. Heft I.
Monatsbericht der königl. preuss. Akademie zu Berlin. März und April 1870.
XVIII und XIX. Jahresbericht der naturhistorischen Gesellschaft in Hannover 1867—69. Hannover 1869. 4.

Martin Haug, an old Pahlavi-Pazand glossary. Bombay, London 1870. 8.
Lotos, Zeitschrift für Naturwissenschaften. Jahrg. XIX. Prag 1869. 8.
G. L. v. Maurer, Geschichte der Städteverfassung in Deutschland. Bd. II. Erlangen 1870. 8.
Guido Vimercati, rivista scientifico-industriale del 1869. Anno primo. Firenze. 8.
Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles. Bogen 3. 4. 1870.
Jahrbücher des Nassauischen Vereins für Naturkunde. Jahrg. XXI und XXII. Wiesbaden 1867. 68. 8.
Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften:
Philosoph.-histor. Classe. Bd. XVI und XVIII.
Mathem.-naturwiss. Classe. Bd. XXIX. Wien 1869. 4.
Sitzungsberichte der kaiserl. Akad. der Wissenschaften:
Philosoph.-histor. Classe. Bd. LXI. Jahrg. 1869. Heft 2. 3. Bd. LXII. Heft 1—4.
Mathem.-naturwiss. Classe. Bd. LX. Jahrg. 1869. Heft 1. 2. Erste Abtheilung.
Bd. LX. Jahrg. 1869. Heft 1. 2. Zweite Abtheilung.
Bd. LIX. Heft 3. 4 und 5. Erste Abtheilung.
Bd. LIX. Heft 4 und 5. Zweite Abtheilung. Wien 1869. 8.
C. Jelinek, die Temperatur-Verhältnisse der Jahre 1848—63. Wien 1869. 4.
Almanach der kaiserl. Akad. der Wiss. zu Wien. Jahrg. XIX. 1869. Wien 1869. 8.
Archiv für österreichische Geschichte. Bd. 41. Erste und zweite Hälfte. Wien 1869. 8.
Annales de la Société Linnéenne de Lyon. T. XVII. année 1869. Paris 1869. gr. 8.
Mémoires de l'Académie Imp. des Sciences, belles-lettres et arts de Lyon. T. XVII. Paris 1869—70. gr. 8.
Chronique de Jean Des Preis. Tome II. Bruxelles 1869. 4.
Chronique de J. de Klerck. Tome III. Bruxelles 1869. 4.
Annuaire de l'Académie des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Bruxelles 1870. 8.
Cartulaire de Cambron. Bruxelles 1869. 4.
A. Snellaert, Nederlandsche Gedichten. Brux. 1869. gr. 8.
Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers, publiés par l'Acad. Royale. T. 34. 1867—70. Bruxelles 1870. 4.

Fortsetzung folgt.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

Juli 27. №. 17. 1870.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber die Abbildung einer n-blättrigen, einfach zusammenhängenden, ebenen Fläche auf einem Kreise.

Von

E. B. Christoffel,

corresp. Mitgliede.

Im Anschluss an die in Nr. 13 dieser Nachrichten erschienene Abhandlung werde ich jetzt das allgemeine Abbildungsproblem behandeln, dessen Lösbarkeit Riemann aus dem Dirichlet'schen Princip gefolgert hat.

Durch Π bezeichne ich eine über die x, y-ebene ausgebreitete n-blättrige, einfach zusammenhängende, ebene Fläche, deren Begrenzung hiernach aus einer in sich zurückkehrenden Kurve K besteht.

Der Einfachheit wegen schliesse ich aus die beiden Grenzfälle, 1) wo K bis ins Unendliche reicht, 2) wo die begrenzte Fläche Π unendlich entfernte Verzweigungspuncte enthält.

Dagegen ist 3) durch die Natur der Sache der Fall ausgeschlossen, dass ein Verzweigungspunct a von Π auf K selbst liegt; denn wenn

dies der Fall ist, so wird an der geometrischen Einrichtung von Π nicht das Mindeste geändert, wenn auf der n- oder mehrblättrigen Fläche T, von welcher Π ein einfachzusammenhängendes Stück ist, der Verzweigungspunct, so weit er K angehört, über Π hinausgerückt wird.

Die Anzahl der einfachen Verzweigungspuncte von Π bezeichne ich durch w, die Anzahl der ins Unendliche reichenden Blätter von Π durch t, so dass also, da die einfachzusammenhängende Fläche Π als im Unendlichen geschlossen aufgefasst werden muss, t auch die Anzahl der unendlich entfernten Puncte von Π bedeutet.

Zwischen diesen Zahlen w, t und der Anzahl der Windungen, welche K macht, besteht eine der Analysis situs angehörige Relation, welche der von Riemann (Theorie der Abel'schen Functionen, Art. 7) für unendlich ausgedehnte Flächen gegebenen Relation analog ist.

Seien z, ζ die Werthe, welche $x+iy$ in einem unbestimmten Puncte von Π, K annimmt; $d\zeta$ entspreche einem positiven Umlaufe um Π, φ sei das Azimuth von $d\zeta$. Dann nimmt während eines positiven Umlaufes um Π das Azimuth φ um ein ganzes Vielfaches.

$$q \,.\, 2\pi$$

von 2π zu, und die positive oder negative ganze Zahl q soll, wie am angeführten Orte, bezeichnet werden als die Anzahl der Umdrehungen, welche die Richtung der Begrenzungslinie K macht.

Ist also q positiv, so macht ein mit der Ortsänderung $d\zeta$ fortwährend gleichgerichteter Zeiger q Umdrehungen in der Richtung der wachsenden Azimuthe, wenn ζ einen positiven Um-

lauf um Π vollbringt; ist q negativ, so macht der Zeiger unter derselben Voraussetzung $-q$ Umdrehungen in der Richtung der abnehmenden Azimuthe.

Dies festgestellt, lautet die oben erwähnte und ohne Schwierigkeit zu beweisende Relation:

1. $$q = w + 1 - 2t,$$

und es folgt weiter

2. $$\int d\varphi = 2\pi(w + 1 - 2t),$$

wenn, wie im Folgenden überhaupt, die Integration in einem positiven Umlaufe um Π oder seine Abbildung ausgeführt wird.

Was die wirkliche Verzweigungsart von Π betrifft, so setze ich fest, dass die w einfachen Verzweigungspuncte sich auf die folgenden s:

$$a_1, a_2, \ldots a_s$$

in der Weise vertheilen, dass in diesen beziehungsweise:

$$\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_s$$

Blätter von Π zusammenhängen, woraus:

3. $$w = \sum_\sigma (\mu_\sigma - 1)$$

folgt.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, diese Fläche Π auf einem Kreise, zunächst auf einer Halbebene E abzubilden.

I.

In einer zweiten Ebene der X, Y sei E derjenige Theil, auf welchem $Y > 0$ ist. Unter der Voraussetzung, dass die Abbildung von Π auf E geleistet sei, sollen

Z, Z die Bilder von z, ζ,

A_1, A_2, . . A_s die Bilder von a_1, a_2, . . a_s,

Γ_1, Γ_2, . . Γ_t die Bilder der t unendlich entfernten Puncte von Π bedeuten. Die Puncte A sowohl wie die Puncte Γ liegen demnach im Innern, nicht auf dem Rande von E.

Nun betrachte ich die durch meine oben erwähnte Abhandlung eingeführten Ausdrücke

$$P = \log \frac{dz}{dZ},$$

$$Q = \frac{1}{\pi} \int \log (\mathrm{Z} - Z)\, d\varphi,$$

und verfolge die gleichzeitigen Aenderungen, welche diese Grössen erfahren, wenn Z, z in positiver Richtung eine gegebene Strecke der Begrenzung durchlaufen.

1. Alsdann ist $dZ = dX$, also positiv, und sein Azimuth constant $= 0$; das Azimuth von dz dagegen ist $= \varphi$, und es folgt, wenn in seine reellen Bestandtheile zerlegt $P = P_1 + i P_2$ ist:

Die Zunahme von P_2 ist gleich der Zunahme von φ.

2. Sei ebenso $Q = Q_1 + i\, Q_2$, und es durchlaufe Z auf der X-axe den Weg von X_1 bis zur grössern Abscisse X_2.

Ist nun Z ein unbestimmter Punct der X-axe, so sind folgende drei Fälle zu unterscheiden. Solange Z sich dem Puncte Z nähert, bleibt

das Azimuth von $\mathrm{Z} - Z$, also der imaginäre Theil des $\log(\mathrm{Z} - Z)$ ungeändert. Dasselbe findet statt, nachdem Z den Punct Z überschritten hat, und sich von ihm entfernt: dagegen nimmt in dem Augenblicke, wo Z den Punct Z überschreitet, also einen halben negativen Umlauf um Z macht, der imaginäre Theil von $\log(\mathrm{Z} - Z)$ zu um $-\pi i$, der imaginäre Theil von $\frac{1}{\pi}\log(\mathrm{Z} - Z)\, d\varphi$ zu um $-i\, d\varphi$, und daraus folgt, dass unter der obigen Voraussetzung Q_2 zunimmt um das

$$\int - d\varphi \text{ von } X_1 \text{ bis } X_2,$$

d. h.:

Die Zunahme von Q_2 ist der Zunahme von φ entgegengesetzt gleich.

3. Setzen wir daher:

$$\log\frac{dz}{dZ} + \frac{1}{\pi}\int \log(\mathrm{Z} - Z)\, d\varphi = u_1 + i v_1,$$

so folgt, dass v_1 ungeändert bleibt, wenn Z, z gleichzeitig die Begrenzungen von E, Π durchlaufen. Setzen wir ferner:

$$\frac{d}{dZ}\log\frac{dz}{dZ} - \frac{1}{\pi}\int\frac{d\varphi}{\mathrm{Z} - Z} = u + i v,$$

so haben wir das Resultat, dass v auf der Begrenzung $= 0$ ist.

II.

Nun untersuchen wir den Verlauf von $u + i v$ in den Puncten A, den Puncten Γ, und in den übrigen Puncten im Innern von E.

1. Ist $z = b$ ein Punct im Innern von Π, der weder Verzweigungspunct Π ist, noch im Unendlichen liegt, B sein Bild auf E, so ist von verschwindenden bis zu endlichen Moduln von $Z - B$:

$$z = b + b'(Z - B) + \tfrac{1}{2} b''(Z - B)^2 + \ldots,$$

und b' von Null verschieden. Also folgt:

$$\frac{d}{dZ} \log \frac{dz}{dZ} = \frac{b' + \ldots}{b'' + \ldots}$$

d. h. diese Grösse ist in B einändrig und stetig. Das Integral:

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{d\varphi}{Z - Z}$$

hat diese Eigenschaft in der ganzen Fläche E, und braucht bei der Untersuchung der Unstetigkeiten von $u + iv$ oder seiner Verzweigungen gar nicht berücksichtigt zu werden. Also folgt:

> Die Grösse $u + iv$ ist einändrig und stetig in allen Puncten von E, in denen weder Verzweigungs-, noch unendlich entfernte Puncte von Π abgebildet sind.

2. Sei a ein $(\mu - 1)$-facher Verzweigungspunct von Π, A sein Bild auf E. Da für $Z = A$ z stetig und $\mu \log(Z - A) - \log(z - a)$ einändrig ist, so folgt bis zu endlichen Moduln von $Z - A$:

$$z = a + (Z - A)^{\mu} [a' + a''(Z - A) + \ldots],$$

wo a' von Null verschieden ist, und hieraus im gleichen Umfange:

$$\frac{d}{dZ}\log\frac{dz}{dZ} = \frac{\mu - 1}{Z - A} + \text{funct. cont. monodr.},$$

also:

> Die Grösse $u + iv$ ist einändrig auch in solchen Puncten A von E, welche die Bilder von Verzweigungspuncten a der Fläche Π sind, aber sie ist dort nicht stetig.

Ist a ein $(\mu - 1)$-facher Verzweigungspunct von Π, so ist in A:

$$(u + iv) - \frac{\mu - 1}{Z - A} = \text{funct. cont.}$$

3. Sei Γ das Bild eines der unendlich entfernten Puncte von Π. Da in letzterm ebenso wie in Γ eine Verzweigung nicht stattfindet, so ist bis zu endlichen Moduln von $Z - \Gamma$:

$$z = \frac{\gamma}{Z - \Gamma} + \gamma' + \gamma''(Z - \Gamma) + \ldots,$$

und γ von Null verschieden, mithin dort

$$\frac{d}{dZ}\log\frac{dz}{dZ} = -\frac{2}{Z - \Gamma} + \text{funct. cont. monodr.}$$

Also folgt:

> Die Grösse $u + iv$ ist einändrig auch in denjenigen Puncten Γ von E, in denen sich

unendlich entfernte Puncte von Π abbilden; aber sie ist dort unstetig, und zwar so, dass dort:

$$(u + iv) + \frac{2}{Z - \Gamma} = \text{funct. cont.}$$

wird.

4. Zur völligen Darstellung der Grösse $u + iv$, welche durch die gefundenen Eigenschaften bis auf eind additive Constante definirt ist, wollen wir nur noch bemerken, dass im unendlich entfernten Puncte von E

$$u + iv = 0$$

wird.

In der That entspricht diesem ein endlicher Werth von z, so dass $\frac{dz}{dZ}$, $\frac{d^2z}{dZ^2}$ in diesem Puncte unendlich klein werden, und zwar letzteres von einer um eine Einheit höhern Ordnung wie jenes.

III.

Fassen wir alle Bedingungen zusammen, so folgt: $u + iv$ ist auf E allenthalben einändrig und mit Annahme der Puncte A, Γ auch stetig. In diesen Puncten ist:

$$(u + iv) - \sum_\sigma \frac{\mu^\sigma - 1}{Z - A_\sigma} + \sum_\tau \frac{2}{Z - \Gamma_\tau}$$

stetig. Sodann ist auf der Begrenzung von E

$$v = 0,$$

und im Unendlichen auch

$$u = 0.$$

Nichts ist leichter, als einen diesen Bedingungen genügenden Ausdruck darzustellen. Seien allgemein A'_σ, Γ'_τ die Conjugirten von A_σ, Γ_τ; dann ist z. B.

$$\frac{1}{Z-A} + \frac{1}{Z-A'} = \frac{2Z-(A+A')}{(Z-A)(Z-A')}$$

der Ausdruck einer Function, deren imaginärer Theil für $Y = 0$ verschwindet, und die auch selbst $= 0$ wird für $Z = \infty$. Dieselbe wird ausserdem auf E unstetig nur im Puncte $Z = A$, und so erkennt man sofort, dass wir setzen können:

$$u + iv = \sum_\sigma (\mu_\sigma - 1)\left(\frac{1}{Z-A_\sigma} + \frac{1}{Z-A'_\sigma}\right)$$

$$- \sum_\tau 2\left(\frac{1}{Z-\Gamma} + \frac{1}{Z-\Gamma'}\right),$$

wo, wie oben, bei der Summation $\sigma = 1, 2, .. s$ und $\tau = 1, 2, .. t$ zu nehmen ist.

Nun beweist man nachträglich, dass es ausser der vorstehenden Lösung unserer Aufgabe keine andere giebt. Ist nämlich $u_1 + iv_1$ ebenfalls eine solche, so sind $u_1 - u$, $v_1 - v$ auf E allenthalben einändrig und stetig und letzteres, weil es auf dem Rande $= 0$ ist, ist überhaupt $= 0$. In Folge dessen ist $u_1 - u$ constant, also $= 0$, da es im Unendlichen verschwindet.

IV.

Um die Uebersicht zu erleichtern, setzen wir

$$\Pi_{(\tau)} (Z - \Gamma_\tau)(Z - \Gamma'_\tau) = \psi(Z)$$

$$\Pi_{(\sigma)} [(Z - A_\sigma)(Z - A'_\sigma)]^{\mu_\sigma - 1} = \theta(Z),$$

und erhalten dann:

$$u + iv = \frac{d}{dZ} \log \frac{\theta(Z)}{[\psi(Z)]^2},$$

mithin als Lösung unseres Abbildungsproblems die Gleichung

A. $$\frac{d}{dZ} \log \left(\frac{dz}{dZ} \frac{(\psi(Z))^2}{\theta(Z)}\right) = \frac{1}{\pi} \int \frac{d\varphi}{Z - Z},$$

wozu noch die aus 2. und 3. folgende Gleichung

B. $$\int d\varphi = 2\pi \left[\sum_\sigma (\mu_\sigma - 1) + 1 - 2t\right]$$

und die Bedingung kommt, dass jede der Variabeln z, Z innerhalb der Fläche, welche die Werthe der andern repräsentirt, einwerthige und stetige Function derselben sein muss.

In Bezug auf die weitere Behandlung dieser Integrale verweise ich auf meine vorige Abhandlung, und bemerke nur noch den Satz:

dass durch die vorstehenden Formeln auch die Abbildung von Π auf einer Kreisfläche geleistet wird, sobald man unter A'_σ, Γ'_τ statt der Conjugirten von A_σ, Γ_τ die mit

diesen Puncten auf demselben Durchmesser liegenden harmonischen Pole derselben versteht.

Der Beweis ergiebt sich mit Hülfe der Relationen 1. und 3. wie am Schlusse meiner vorigen Abhandlung.

V.

Hiermit ist eine der wichtigsten Aufgaben gelöst, welche die allgemeine Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse darbietet, und ich glaube es nicht bedauern zu dürfen, wenn meine vier auf diese Frage bezüglichen Abhandlungen zugleich den Weg erkennen lassen, den meine Untersuchungen genommen haben.

Ich lege auf meine Resultate, deren Wichtigkeit auf ihrem Zusammenhange mit dem Fundamentalsatze der von Riemann gegründeten Functionentheorie beruht und für Kenner dieser Theorie keiner Erörterung bedarf, um so grössern Werth, weil dieser Fundamentalsatz selbst, wie Herr Heine in seinen neuesten Mittheilungen (Borchardt's Journal 71) bezeugt, Gegenstand der Discussion geworden ist.

Den scharfsinnigen Forschern, welche sich mit der Ermittelung der Schwierigkeiten beschäftigen, die dem Beweise dieses Satzes anhaften, ist jetzt die Möglichkeit gegeben, zu vergleichen, ob die von ihnen entdeckten Schwierigkeiten mit den wirklich vorhandenen übereinstimmen, nämlich denjenigen, welche für die wirkliche Behandlung der nunmehr zum Ansatze gebrachten allgemeinen Aufgabe zu überwinden sind.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Mai und Juni.

(Fortsetzung.)

Mémoires couronnés. Collection in — 8. t. 21. Bruxelles 1870. 8.

Bulletins de l'Acad. R. 38me année, 2me série. T. 27. 28. 1869. Bruxelles 1869. 8.

Annales de l'Observatoire R. de Bruxelles. T. 19. Bruxelles 1869. 4.

Ad. Quetelet, Physique sociale. Ebd. 1869. 8.

— Annuaire de l'Observatoire R. de Bruxelles. 1870. 37me année. Bruxelles 1869. 8.

— Notice sur le Congrès statistique de Florence en 1867. 4.

— Diverses brochures.

Bulletin de la Société Imp. des Naturalistes de Moscou. Année 1869. Nr. 1—3. Moscou 1869. 8.

J. Trausch, Denkblätter der siebenbürg. Deutschen. Bd. 1. Kronstadt 1868. 8.

Archiv des Vereins für siebenb. Landeskunde. Neue Folge. Bd. IX. Heft 1. Kronstadt 1870. 8.

Jahresbericht des Vereins für siebenb. Landeskunde 1868—69. Hermannstadt 1869. 8.

Wissenschaftliche Begründung der Rechnungsmethoden des Centralbüreaus der Europäischen Gradmessung. 4.

Archiv des historischen Vereins von Unterfranken und Aschaffenburg. Bd. XX. Heft III. Würzburg 1870. 8.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Jahrg. V. Heft 2. (April 1870). Leipzig 1870. 8.

Verhandlungen des naturf. Vereins in Brünn. Bd. VII. 1868. Brünn 1869. 8.

Schriften der königl. physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. X. 1869. Abth. 1. 2. Königsberg 1869. 4.

Mémoires de la Société des Sciences Naturelles de Strassbourg. T. VI. Deuxième Livraison. Strassb. 1870. 4.

Fortsetzung folgt.

371

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

August 3. № 18. 1870.

Universität.

Verzeichniss der Vorlesungen auf der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen während des Winterhalbjahrs $18^{70}/_{71}$. Die Vorlesungen beginnen den 15. October und enden den 15. März.

Theologie.

Einleitung in das Studium der Theologie: Prof. *Ehrenfeuchter* zweimal, Mittwoch und Sonnabend 12 Uhr, öffentlich.

Kritische und hermeneutische Einleitung in die kanonischen und apokryphischen Bücher des Alten Testaments: Prof. *Bertheau* in fünf Stunden um 11 Uhr.

Einleitung ins Neue Testament: Prof. *Ritschl* fünfmal um 11 Uhr.

Biblische Theologie des Neuen Testaments: Prof. *Wiesinger* fünfmal, um 11 Uhr.

Erklärung der Psalmen: Prof. *Bertheau* sechsmal um 10 Uhr.

Erklärung des Buches Jesaia: Prof. *de Lagarde* sechsmal um 10 Uhr.

Erklärung des Hiob, Lic. *Wellhausen*, fünfstündig um 10 Uhr.

Hebraeische Grammatik: s. *Orientalische Sprachen*. S. 13.

Synoptische Evangelien: Prof. *Wiesinger* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung des Evangeliums und der Briefe Johannis: Prof. *Lünemann* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung des Evangeliums Johannis: Lic. *Zahn* fünfstündig um 9 Uhr.

Erklärung der Apostelgeschichte: *Derselbe* dreistündig Montags, Dienstags, Donnerstags um 12 Uhr.

Erklärung des Römerbriefs: Prof. *Gess* fünfmal um 9 Uhr.

Abriss der Kirchengeschichte: Prof. *Duncker* sechsmal um 8 Uhr.

Neuere Kirchengeschichte: *Derselbe* fünfmal um 4 Uhr öffentlich.

Reformationsgeschichte: Prof. *Wagenmann* zweimal, Mont. und Sonnab. um 8 Uhr öffentlich.

Kirchengeschichte des neunzehnten Jahrhunderts: *Derselbe* viermal, Dienst., Mittw., Donnerst., Freit. um 8 Uhr.

Dogmengeschichte: Prof. *Wagenmann* fünfmal um 4 Uhr.

Geschichte der neueren und neuesten Theologie mit besonderer Rücksicht auf die allgemeine Culturgeschichte: Prof. *Ehrenfeuchter* viermal, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., um 5 Uhr.

Comparative Symbolik: Prof. *Schoeberlein* fünfmal um 11 Uhr.

Comparative Symbolik: Prof. *Matthaei* Donnerstag und Freitag um 2 Uhr.

Die Symbolik der Lutherischen Kirche mit Rücksicht auf die Hauptsymbole der Reformirten Kirche: Prof. *Matthaei* Mont. und Dienst. um 2 Uhr.

Dogmatik Th. I und II: Prof. *Schöberlein* viermal um 12 und fünfmal um 4 Uhr.

Dogmatik Th. I: Prof. *Gess* fünfmal um 12 Uhr.

Theologische Ethik: Prof. *Ritschl* fünfmal um 10 Uhr.

Praktische Theologie Th. I. (Prolegomena, Theorie der Mission und Katechetik): Prof. *Ehrenfeuchter* viermal, Montag Dienstag Donnerstag Freitag um 3 Uhr.

Kirchenrecht s. unter Rechtswissenschaft S. 4.

Die Uebungen des Kön. homiletischen Seminars leiten abwechslungsweise Prof. *Ehrenfeuchter* und Prof. *Wiesinger* Sonnabend von 9—12 Uhr öffentlich.

Katechetische Uebungen: Prof. *Ehrenfeuchter* Sonnabend von 3—4 Uhr, Prof. *Wiesinger* Mittwoch von 5—6 Uhr öffentlich.

Die liturgischen Uebungen der Mitglieder des praktisch-theologischen Seminars leitet Prof. *Schöberlein* Sonnabend von 9—10 Uhr öffentlich.

Anleitung zum Kirchengesang: *Derselbe* Mittwochs 6—7 Uhr öffentlich.

Eine theologische Societät leitet Prof. *Schöberlein*, dessgleichen Prof. *Gess*, eine historisch-theologische Societät Prof. *Wagenmann*.

Die systematischen, kirchengeschichtlichen und exegetischen Conversatorien im theologischen Stift werden in gewohnter Weise Montag Abends 6 Uhr von den Repetenten geleitet werden.

Repetent *Hachfeld* wird in später zu bestimmenden Stunden ein dogmatisches Repetitorium leiten.

Rechtswissenschaft.

Encyclopaedie der Rechtswissenschaft: Prof. *John* viermal wöchentlich um 11 Uhr.

Geschichte des römischen Rechts: Prof. *Ribbentrop* von 10—11 Uhr, und Freitags auch von 5—6 Uhr.

Geschichte des römischen Civilprocesses: Prof. *Hartmann* dreimal wöchentlich von 3—4 Uhr.

Institutionen des römischen Rechts: Prof. *Ribbentrop* von 12—1 Uhr und Dienstags auch von 5—6 Uhr.

Pandekten: Prof. *Francke* von 9—10 und 11—12 Uhr,

Erbrecht: Dr. *Enneccerus* nach Arndt's Pandekten fünfmal wöch. von 12—1 Uhr.

Exegetische Uebungen: Prof. *Wolff* drei Stunden von 3—4 Uhr.

Erklärung der Commentarien des Gaius: Prof. *Wolff* zwei Stunden von 3—4 Uhr öffentlich; Erklärung des vierten Buchs der Institutionen des Gaius: Dr. *Enneccerus* Sonnabends von 12—1 Uhr öffentlich.

Deutsche Staats- und Rechtsgeschichte: Prof. *Kraut* täglich von 10—11 Uhr; Deutsche Rechts- und Verfassungsgeschichte: Prof. *Dove* täglich von 4—5 Uhr.

Deutsches Privatrecht mit Einschluss des Lehnrechts: Prof. *Thöl* fünfmal wöch. von 8—9 und von 9—10 Uhr.

Erklärung des Sachsenspiegels: Prof. *Sohm*, Sonnabend von 11—12 Uhr, öffentlich.

Handels- und Wechselrecht: Prof. *Dove* fünfmal wöch. von 10—11 Uhr.

Landwirthschaftsrecht: Dr. *Ziebarth* dreistündig Montag Mittwoch und Freitag von 5—6 Uhr.

Strafrecht unter vorzugsweiser Berücksichtigung des Strafgesetzbuchs für den Norddeutschen Bund: Prof. *John* fünfmal. wöch. um 10 Uhr.

Deutsches Reichs- und Bundesrecht, insbesondere das Recht des Norddeutschen Bundes: Prof. *Zachariae* viermal wöch. um 12 Uhr; Deutsches Staatsrecht mit Einschluss des Norddeutschen Bundesrechts: Prof. *Frensdorff* fünfstündig von 11—12 Uhr.

Völkerrecht: Prof. *Frensdorff* dreimal wöch. von 12—1 Uhr.

Kirchenrecht, evangelisches und katholisches: Prof. *Kraut* fünfmal wöch. von 12—1 Uhr; Evangelisches und katholisches Kirchenrecht einschliesslich des Eherechts: Prof. *Dove* fünfmal wöch. von 9—10 Uhr.

Civilprocess-Theorie: Prof. *Briegleb* achtstündig von 4—5 und von 5—6 Uhr.

Deutscher Strafprocess des gemeinen Rechts und der neueren deutschen Strafprocessordnungen: Prof. *Zachariae* fünfmal wöch. um 11 Uhr.

Civilprocesspracticum: Prof. *Hartmann* zweimal wöch. von 4—6 Uhr.

Relatorium: *Derselbe* zweimal wöch. von 4—6 Uhr.

Strafrechts- und Strafprocesspracticum: Prof. *John* Mittwoch von 4—6 Uhr.

Gerichtliche Medicin und öffentliche Gesundheitspflege siehe unter Medicin S. 347.

Medicin.

Zoologie, vergleichende Anatomie, Botanik, Chemie siehe unter Naturwissenschaften.

Anthropologie mit Benutzung der Blumenbach'schen

Sammlung (auch für Nicht-Mediciner): Dr. *Merkel* Montag, Mittwoch, Donnerstag von 11—12 Uhr.

Knochen- und Bänderlehre: Prof. *Henle*, Dienstag, Freitag, Sonnabend von 11—12 Uhr.

Systematische Anatomie I. Theil Prof. *Henle*, täglich von 12—1 Uhr.

Topographische Anatomie: Prof. *Henle*, Mont. Mittw. und Donnerst. von 2—3 Uhr.

Secirübungen, in Verbindung mit Prosector Dr. *Merkel* täglich von 9—4 Uhr.

Mikroskopische Uebungen leitet Prof. *Krämer* privatissime; Dr. *Merkel* wie bisher.

Mikroskopische Curse hält Prof. *Krause* im pathologischen Institute, für Anfänger um 11 Uhr, für Geübtere um 12 oder um 2 Uhr.

Allgemeine und besondere Physiologie mit Erläuterungen durch Experimente und mikroskopische Demonstrationen: Prof. *Herbst*, in sechs Stunden wöchentlich um 10 Uhr.

Experimentalphysiologie II. Theil (Physiologie des Nervensystems und der Sinnesorgane): Prof. *Meissner* fünfmal wöchentlich von 10—11 Uhr.

Arbeiten im physiologischen Institute leitet Prof. *Meissner* täglich in passenden Stunden.

Allgemeine Pathologie und Therapie: Prof. *Krämer* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 4—5 Uhr oder zu anderen passenden Stunden.

Pathologische Anatomie lehrt Prof. *Krause* Dienstag und Freitag um 2 Uhr, Sonnabend von 3—5 Uhr.

Physikalische Diagnostik in Verbindung mit praktischen Uebungen an Gesunden und Kranken lehrt Dr. *Wiese* viermal wöchentlich in später näher zu bezeichnenden Stunden.

Pharmakologie oder Lehre von den Wirkungen und der Anwendungsweise der Arzneimittel sowie Anleitung zum Receptschreiben: Prof. *Marx* fünfmal wöchentlich von 5—6 Uhr.

Arzneimittellehre und Receptirkunde verbunden mit pharmakognostischen Demonstrationen und erläuternden Experimenten trägt Dr. *Husemann* fünfmal wöchentlich von 5—6 Uhr vor; Dasselbe gleichfalls in Verbindung mit Demonstrationen der Arzneimittel und ihrer phy-

siologischen und toxischen Wirkung lehrt Dr. *Marmé* fünfmal wöchentlich von 5—6 Uhr.

Ein pharmakologisches Practicum (Uebungen im Bestimmen und Verordnen der einfachen und zusammengesetzten Arzneimittel) hält Dr. *Marmé* Sonnabend von 3—4 Uhr privatissime und unentgeldlich.

Pharmakologische und toxikologische Untersuchungen leitet Dr. *Husemann* in passenden Stunden privatissime und unentgeldlich; Dr. *Marmé* zu passenden Stunden im physiologischen Institut.

Pharmacie lehrt Prof. *Wiggers* sechsmal wöchentlich von 8—9 Uhr, Dasselbe Dr. *Stromeyer* privatissime.

Pharmacie für Mediciner lehrt Prof. *von Uslar* in später zu bestimmenden Stunden.

Elektrotherapie in Verbindung mit praktischen Uebungen in der Anwendung des Inductions- und des constanten Stroms lehrt Dr. *Marmé* Donnerstag und Freitag von 6—7 Uhr.

Repetitorien über Materia medica und Therapie hält Dr. *Husemann* von 2—3 Uhr oder zu gelegener Zeit.

Specielle Pathologie und Therapie: Prof. *Hasse* täglich Sonnabend ausgenommen von 4—5 Uhr.

Die medicinische Klinik und Poliklinik leitet Prof. *Hasse* täglich von 10½—12 Uhr.

Geschichte der Chirurgie trägt Prof. *Baum* Mittwoch von 5—6 Uhr öffentlich vor.

Allgemeine Chirurgie: Prof. *Lohmeyer* fünfmal wöchentlich von 5—6 Uhr.

Chirurgie II. Theil: Prof. *Baum* fünfmal wöchentlich von 6—7 Uhr, Sonnabend von 2—3 Uhr.

Die Lehre von den chirurgischen Operationen: Prof. *Baum* viermal wöchentlich von 5—6 Uhr.

Die chirurgische Klinik leitet Prof. *Baum* täglich von 9—10½ Uhr.

Augenheilkunde: Prof. *Schweigger* viermal wöchentlich von 3—4 Uhr.

Die Theorie des Augenspiegels erläutert Prof. *Schweigger* Mittwoch von 3—4 Uhr publice.

Praktische Uebungen im Gebrauch des Augenspiegels leitet Prof. *Schweigger* Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Klinik der Augenkrankheiten hält Prof. *Schweigger* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 12—1 Uhr.

Geburtskunde trägt Prof. *Schwartz* Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag um 3 Uhr vor.

Geburtshülfliches Casuisticum mit Phantomübungen hält Prof. *Krämer* in näher zu verabredenden Stunden.

Geburtshülflichen Operationscursus hält Prof. *Schwartz* Mittwoch und Sonnabend um 8 Uhr.

Geburtshülflich-gynaekologische Klinik leitet Prof. *Schwartz* Mont., Dienst., Donn. und Freit. um 8 Uhr.

Pathologie und Therapie der Geisteskrankheiten lehrt Prof. *Meyer* Mittwoch und Sonnabend von 3—4 Uhr im Ernst-August Hospitale.

Psychiatrische Klinik hält *Derselbe* Montag und Donnerstag von 4—6 Uhr.

Gerichtliche Medicin: Prof. *Krause* Mittwoch und Sonnabend von 8—9 Uhr oder zu anderen passenden Stunden; Dasselbe trägt Prof. *Lohmeyer* viermal wöchentlich von 3—4 Uhr vor.

Ueber öffentliche Gesundheitspflege mit besonderer Rücksicht auf Diaetetik (auch für Nicht-Mediciner) trägt Prof. *Meissner* Montag, Mittwoch, Donnerstag von 5—6 Uhr vor.

Sanitätspolizei lehrt Prof. *Lohmeyer* fünfmal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Anatomie und Physiologie der Hausthiere nebst Pferde- und Rindviehkunde lehrt Dr. *Luelfing* sechs Mal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Die Theorie des Hufbeschlags trägt Dr. *Luelfing* öffentlich in zu verabredenden Stunden vor.

Philosophie.

Geschichte der alten Philosophie Dr. *Peipers*, Mont. Dienst. Donn. Freit., um 8 Uhr.

Geschichte der mittelalterlichen und neueren Philosophie Prof. *Baumann*, fünf Stunden, um 5 Uhr.

Logik und Encyclopaedie der Philosophie Prof. *Lotze*, vier Stunden um 10 Uhr.

Erkenntnisstheorie oder Metaphysik Prof. *Baumann*, 4 Stunden, um 8 Uhr.

Psychologie Prof. *Lotze*, vier Stunden um 4 Uhr.

Religionsphilosophie Prof. *Bohtz*, Montag und Donnerstag um 4 Uhr; Prof. *Peip*, vier Stunden um 5 Uhr.

In seiner philosophischen Societät wird Prof. *Bau-*

mann Kants Kritik der praktischen Vernunft behandeln, Mittw. 6—8 Uhr.

In seinen philosophischen Societäten wird Prof. *Peip* Freitags die Grundlehren der Logik nach Trendelenburgs „Elementa logices Aristoteleae" entwickeln; Donnerstags das erste Buch der Metaphysik des Aristoteles erklären.

Dr. *Peipers* wird in seiner philosophisch-philologischen Societät Platons Theätet erklären, Freitag 6—8 Uhr.

Allgemeine Pädagogik Prof. *Moller*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag um 5 Uhr.

Geschichte der Paedagogik Prof. *Moller*, an denselben Tagen, um 12 Uhr.

Geschichte der Erziehung Prof. *Krüger*, 2 Stunden, um 4 Uhr.

Die Uebungen des K. pädagogischen Seminars leitet Prof. *Sauppe*, Montag und Dienstag um 11 Uhr.

Zur Leitung einer pädagogischen und einer philosophischen Societät erbietet sich Prof. *Moller*.

Mathematik und Astronomie.

Algebraische Analysis nebst einer Einleitung über die Grundbegriffe der Arithmetik Prof. *Stern*, fünf Stunden, um 11 Uhr.

Die Elemente der Theorie der algebraischen Formen Prof. *Clebsch* Mont. Dienst. Donn. Freit. um 12 Uhr.

Analytische Geometrie mit den Flächen zweiten Grades Prof. *Ulrich*, um 10 Uhr.

Differential- und Integralrechnung Prof. *Ulrich*, um 4 Uhr; und Prof. *Enneper*, Montag bis Freitag um 9 Uhr.

Einleitung in die Theorie der Abelschen Functionen Prof. *Clebsch*, Mont. Dienst. Donn. Freit., um 11 Uhr.

Theorie der elliptischen Functionen Prof. *Enneper*, Montag bis Freitag, um 4 Uhr.

Uebungen über Anwendungen der elliptischen Functionen Prof. *Clebsch*, Mittwoch um 12 Uhr.

Theorie der Kugelfunctionen Dr. *Minnigerode*, drei Stunden, um 4 Uhr.

Methode der kleinsten Quadrate Prof. *Schering*, öffentlich, Sonnabend 9—11 Uhr.

Mathematische Theorie der Schwere, des Magnetis-

mus, der Electricität und der galvanischen Ströme Prof. *Schering*, Dienstag bis Freitag, um 9 Uhr.

Analytische Mechanik Prof. *Stern*, vier Stunden, um 10 Uhr.

Lehren der theoretischen Astronomie (Bahnbestimmungen) Prof. *Klinkerfues*, Montag, Dienstag, Mittwoch und Donnerstag um 12 Uhr.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar trägt Prof. *Ulrich* die Theorie der einfachen Maschinen vor, Sonnabend um 10 Uhr; leitet die mathematischen Uebungen Prof. *Stern* Mittwoch um 11 Uhr; magnetische Uebungen Prof. *Schering*, Freitag 5 Uhr; giebt Anleitung zur Anstellung astronomischer Beobachtungen Prof. *Klinkerfues*, in einer passenden Stunde. Vgl. *Naturwissenschaften* S. 350.

Naturwissenschaften.

Allgemeine Zoologie Prof. *Claus*, fünf Stunden, um 3 Uhr.

Vergleichende Anatomie der Wirbelthiere, nebst einer Uebersicht über die Hauptgruppen der Wirbelthiere Prof. *Claus*, fünf Stunden, um 8 Uhr.

Naturgeschichte der Parasiten der Menschen und der Hausthiere Dr. *Grenacher*, 2 Stunden.

Darlegung und Kritik der Darwinschen Lehre Prof. *Claus*, Sonnabend um 8 Uhr, öffentlich.

Zoologisch-zootomische Uebungen Prof. *Claus*, privatissime, zu gelegener Zeit.

Anatomie und Physiologie der Pflanzen, in Verbindung mit der physiologischen Theorie des Ackerbaus, Prof. *Grisebach*, Mont. Dienst. Donn. Freit., um 4 Uhr.

Mikroskopische Demonstrationen über die Gewebelehre der Pflanzen im physiologischen Institut, *Derselbe*, Sonnabend um 10 Uhr.

Anatomie und Physiologie der Pflanzen, sowie die Elemente der systematischen Botanik trägt Prof. *Lantzius-Beninga* vor, Mont., Dienst., Donn., Freit., um 5 Uhr, und stellt zur Erläuterung dieser Vorträge mikroskopische Beobachtungen Sonnabend um 10 Uhr an.

Naturgeschichte der kryptogamischen Gewächse Prof. *Bartling*, vier Stunden, um 2 Uhr.

Demonstrationen in den Gewächshäusern des botanischen Gartens giebt *Derselbe* Mittw. um 11 Uhr, öffentlich.

Botanische Excursionen in bisheriger Weise *Derselbe*.

Ein Repetitorium über allgemeine und specielle Botanik hält und zu Privatissima über dieselbe erbietet sich Prof. *Lantzius-Beninga*.

Mineralogie, zweiten Theil, Prof. *Sartorius von Waltershausen*, um 11 Uhr.

Ueber die geologisch und technisch wichtigsten Mineralien Prof. *von Seebach*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. um 12 Uhr.

Ueber die Geologie der Steinkohlenformation Prof. *Sartorius von Waltershausen*, öffentlich, Donnerst. um 6 Uhr.

Krystallographie und Optik der Krystalle Prof. *Listing*, vier Stunden, um 4 Uhr.

Palaeontologie Prof. *von Seebach*, fünf St., um 9 Uhr.

Das mineralogische Praktikum hält Prof. *Sartorius von Waltershausen* wie früher.

Petrographische und palaeontologische Uebungen Prof. *von Seebach*, in gewohnter Weise, 10—1 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Physik, zweiten Theil, über Electricität, Magnetismus, Wärme und Licht Prof. *Weber*, Montag, Dienstag, Mittwoch 5—7 Uhr.

Elemente der praktischen Physik Prof. *Kohlrausch*, Donnerstag und Freitag von 5—6 Uhr.

Ueber Auge und Mikroskop Prof. *Listing*, in zwei zu verabredenden Stunden.

Die praktischen Uebungen im physikalischen Laboratorium leitet Prof. *Kohlrausch*.

Vorträge über *Schwere*, *Magnetismus*, *Electricität und galvanische Ströme*. S. unter *Mathematik* S. 348 f.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar leitet physikalische Uebungen Prof. *Listing*, Mittwoch um 4 Uhr, und Prof. *Kohlrausch*, Montag um 9 Uhr. Siehe *Mathematik und Astronomie* S. 349.

Chemie Prof. *Wöhler*, sechs Stunden, um 9 Uhr.

Allgemeine organische Chemie Prof. *Hübner*, Montag bis Donnerstag, um 12 Uhr.

Organische Chemie speciell für Mediciner in später zu bestimmenden Stunden Prof. *von Uslar*.

Organische Chemie speciell für Mediciner 2 mal wöchentl. um 8 Uhr oder zu einer anderen gelegenen Zeit Dr. *Tollens*.

Analytische Chemie, mit Berücksichtigung der in der Praxis üblichen Methoden Dr. *Tollens*, Dienst. Freit., um 8 Uhr oder zu anderer gelegener Zeit.

Pharmaceutische Chemie Prof. *von Uslar*, vier Stunden, um 4 Uhr.

Die Grundlehren der neueren Chemie und ihre Entwicklung aus den älteren Ansichten Prof. *Hübner*, Freit. um 12 Uhr.

Ueber einzelne Zweige der theoretischen Chemie Dr. *Stromeyer*, privatissime.

Die Vorlesungen über Pharmacie s. unter *Medicin* S. 6.

Die praktisch-chemischen Uebungen und Untersuchungen im akademischen Laboratorium leitet Prof. *Wöhler* in Gemeinschaft mit den Assistenten Prof. *von Uslar*, Prof. *Hübner*, Dr. *Tollens* und Dr. *Jannasch*.

Prof. *Wicke* leitet die chemischen Uebungen für die Studirenden der Landwirthschaft.

Prof. *Boedeker* leitet die praktisch-chemischen Uebungen im physiologisch-chemischen Laboratorium, täglich (mit Ausschl. d. Sonnb.) 8—12 und 2—4 Uhr.

Historische Wissenschaften.

Historisch-politische Geographie Europas Prof. *Pauli*, vier Stunden, um 9 Uhr.

Geographie und Statistik von Süd-Amerika Prof. *Wappäus*, vier Stunden, um 11 Uhr.

Uebungen in der praktischen Diplomatik Dr. *Cohn*, Mittwoch und Sonnabend um 11 Uhr.

Römische Geschichte Prof. *Wachsmuth*, Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag, um 12 Uhr.

Geschichte des Mittelalters Dr. *Cohn*, vier Stunden, um 12 Uhr.

Geschichte des Zeitalters der Revolution und der Befreiungskriege Prof. *Pauli*, fünf Stunden, um 5 Uhr.

Allgemeine Geschichte der Gegenwart Prof. *Droysen*, vier Stunden, um 5 Uhr.

Allgemeine Verfassungsgeschichte Prof. *Waitz*, vier Stunden, um 8 Uhr.

Deutsche Geschichte Prof. *Waitz*, fünf Std., um 4 Uhr.

Geschichte der deutschen Reformation Prof. *Droysen*, Mittwoch um 6 Uhr, öffentlich.

Ueber die Geschichtschreiber der ältern deutschen Kaiserzeit Dr. *Steindorff*, drei Stunden, um 9 Uhr.

Geschichte Italiens seit dem Anfange des 12. Jahrhun-

derts wird Assessor Dr. *Wüstenfeld,* in vier Stunden, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, um 11 Uhr, unentgeltlich nach seiner Rückkehr aus Italien vortragen.

Historische Uebungen leitet Prof. *Waitz*, Freitag um 6 Uhr, öffentlich.

Uebungen in der alten Geschichte leitet Prof. *Wachsmuth,* eine Stunde, privatissime, unentgeltlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Pauli*, eine Stunde, öffentlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Droysen*, eine Stunde, öffentlich.

Eine historische Gesellschaft will unentgeltlich Dr. *Cohn* leiten, deren Theilnehmern er Ottos von Freising Buch über die Thaten Kaiser Friedrichs I vorlegen wird.

Historische Uebungen leitet Dr. *Steindorff* einmal wöchentlich, unentgeltlich.

Kirchengeschichte: s. unter *Theologie* S. 342.

Staatswissenschaft und Landwirthschaft.

Nationalökonomie (Volkswirthschaftslehre) Prof. *Hanssen,* vier Stunden, um 3 Uhr.

Finanzwissenschaft *Derselbe*, vier Stunden, um 5 Uhr.

Einleitung in die Statistik Prof. *Wappäus*, Sonnabend um 11 Uhr, öffentlich.

Statistik des preussischen Staates Dr. *Dede*, Dienst. Donn. und Freit., um 12 Uhr.

Statistik von Südamerika: s. *Historische Wiss.* S. 351.

Geschichte des Handels und der Industrie Dr. *Dede*, Mittw. um 12 Uhr, öffentlich.

Allgemeine Verfassungsgeschichte: s. *Historische Wiss.* S. 351.

Landwirthschaftliche Betriebslehre Prof. *Griepenkerl*, Mont. Dienst. Donn. und Freit., um 5 Uhr.

Die Ackerbausysteme Prof. *Griepenkerl*, in zwei passenden Stunden, öffentlich.

Die allgemeine und specielle landwirthschaftliche Thierproductionslehre *Derselbe*, Mont., Dienst., Donnerst. und Freit. um 12 Uhr. — Im Anschluss an diese Vorlesungen werden Demonstrationen auf benachbarten Landgütern und in Fabriken, sowie praktische Uebungen gehalten werden.

Landwirthschaftliche Betriebslehre Prof. *Drechsler*, vier Stunden, um 4 Uhr.

Landwirthschaftliche Fütterungslehre Prof. *Henneberg*, vier Stunden, Mittwoch und Sonnabend, von 11—1 Uhr.

Ueber Pachtverträge Prof. *Drechsler*, eine Stunde, um 4 Uhr.

Landwirthschaftliches Praktikum: Uebungen im Anfertigen landwirthschaftlicher Berechnungen Prof. *Drechsler*, in zu bestimmenden Stunden.

Physiologische Theorie des Ackerbaus: S. *Naturwissenschaften* S. 349.

ChemischeUebungen s.unter *Naturwissenschaften* S. 351.

Anatomie der Hausthiere, Pferde- und Rindviehkunde; Hufbeschlag s. *Medicin* S. 347.

Landwirthschaftsrecht s. *Rechtswissenschaft* S. 344.

Literärgeschichte.

Literaturgeschichte Prof. *Hoeck*.

Geschichte der Literatur, ersten Theil, Prof. *Schweiger*, vier Stunden.

Geschichte der griechischen Poesie Prof. *von Leutsch*, fünf Stunden, um 3 Uhr.

Geschichte der deutschen Nationalliteratur Prof. *Wilh. Müller*, fünf Stunden, um 3 Uhr.

Geschichte der deutschen Dichtung Assessor *Tittmann*, um 10 Uhr.

Geschichte der deutschen Nationalliteratur von Lessings Zeit bis zur Gegenwart Prof. *Bohtz*, Mont. Dienst. Donn. Freit., um 11 Uhr.

Alterthumskunde.

Die Methodologie der Archaeologie und die Archaeologie selbst Prof. *Wieseler*, Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag, um 12 Uhr.

Topographie von Rom und Pompeii wird vortragen und die Denkmäler dieser Städte beschreiben Prof. *Wieseler*, drei Stunden, um 5 Uhr.

Römische Sacralalterthümer Dr. *Hirschfeld*, Dienst. Donnerst. Freit., um 10 Uhr.

Im k. archäologischen Seminar lässt Prof. *Wieseler* öffentlich Pausanias' Beschreibung von Phokis und ausgewählte Kunstwerke erklären, Mittwoch und Sonnabend, um 12 Uhr. Die schriftlichen Arbeiten der Mitglieder wird er privatissime beurtheilen.

Ueber die deutsche Heldensage Assessor *Tittmann*, um 5 Uhr.

Vergleichende Sprachkunde.

Vergleichende Grammatik der vier indogermanischen Hauptsprachen, Sanskrit, Griechisch, Lateinisch und Deutsch Prof. *Benfey*, Mont., Dienst., Donn. und Freitag, um 12 Uhr.

Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das A. u. N. Testament siehe unter *Theologie* S. 341 f.

Hebräische Grammatik Dr. *Hoffmann*, vier Stunden, um 11 Uhr.

Die hebräische Gesellschaft leitet Prof. *de Lagarde* wie bisher, Mittw. und Sonnabd. um 11 Uhr, öffentlich.

Anfangsgründe des Syrischen Dr. *Hoffmann*, Mittw. und Sonnabend, um 11 Uhr, öffentlich.

Ausgewählte Stücke aus arabischen Schriftstellern Prof. *Wüstenfeld*, privatissime.

Unterricht in der äthiopischen Sprache ertheilt Prof. *Bertheau*, Dienstag und Donnerstag, um 2 Uhr.

Grammatik des Sanskrit Prof. *Benfey*, Dienst. Donn. Freit., um 3 Uhr.

Erklärung vedischer Hymnen und anderer Sanskritgedichte Prof. *Benfey*, Mont. u. Mittw., um 3 Uhr.

Griechische und lateinische Sprache.

Hermeneutik und Kritik Prof. *Sauppe*, Mont., Dienst., Donn., Freit., um 9 Uhr.

Aristophanes Frösche Prof. *von Leutsch*, fünf Stunden, um 10 Uhr.

Geschichte der griechischen Poesie: s. *Literärgesch.* S. 353.

Platons Theaetet und Aristoteles Metaphysik s. *Philosophie* S. 348; Pausanias s. *Alterthumskunde* S. 353.

Horatius ausgewählte Gedichte (Satirae, Carmina, Epistolae) Prof. *Sauppe*, Mont. Dienst. Donn. Freit., um 2 Uhr.

Iuvenal's Satiren Dr. *Hirschfeld*, Mittw. und Sonnabend 12 Uhr.

Einleitung in Ciceros philosophische Schriften Dr. *Peipers*, Mittw. um 4 Uhr, unentgeltlich.

Im k. philologischen Seminar leitet die schriftlichen Arbeiten und Disputationen Prof. *Sauppe*, Mittwoch von 11—1 Uhr; lässt Herodot Buch 1 erklären Prof. *Wachsmuth*, Montag und Dienstag, um 11 Uhr; lässt Vergils Idyllen erklären Prof. *von Leutsch*, Donnerstag und Freitag, um 11 Uhr, alles öffentlich.

Im philologischen Proseminarium leiten die schriftlichen Arbeiten und Disputationen die Proff. *von Leutsch*, *Sauppe* (Mittw. 2 Uhr) und *Wachsmuth*, lässt Herodot 3, 39 ff. Prof. *Wachsmuth*, Sonnabend um 11 Uhr, Vergils sechste Idylle Prof. *von Leutsch* erklären, Mittwoch um 9 Uhr, alles öffentlich.

Deutsche Sprache.

Ausgewählte althochdeutsche und mittelhochdeutsche Dichtungen nach W. Wackernagels kleinerem altdeutschen Lesebuche Prof. *Wilh. Müller*, Mont. Dienst. Donn., um 10 Uhr.

Die Uebungen der deutschen Gesellschaft leitet *Derselbe*.

Geschichte der deutschen Literatur: s. unter *Literärgeschichte*, S. 353. Die deutsche Heldensage: s. *Alterthumskunde* S. 354.

Neuere Sprachen.

Grammatik der englischen Sprache lehrt, in Verbindung mit praktischen Uebungen, Prof. *Theod. Müller*, Donn. Freit. Sonnab. um 12 Uhr.

Die ältesten französichen Sprachdenkmäler nach Bartsch's altfranz. Chrestomathie erklärt *Derselbe*, Mont. um 9 Uhr, öffentlich.

Geschichte der französischen Sprache *Derselbe*, Dienst. Donn. Freit., um 9 Uhr.

Französiche Sprech- und Schreibübungen veranstaltet *Derselbe*, Mont. Dienst. Mittw. um 12 Uhr.

Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Geschichte der Malerei Prof. *Unger*, Dienst. und Donnerst., 6—8 Uhr, nach seiner: Uebersicht der Bildhauer- und Malerschulen. Göttingen 1860.

Unterricht im Zeichnen, wie im Malen, ertheilen Zeichenmeister *Grape* und, mit besonderer Rücksicht auf

naturhistorische und anatomische Gegenstände, Zeichenlehrer *Peters*.

Geschichte der Musik Prof. *Krüger*, zwei Stunden, um 4 Uhr.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen, Musikdirector *Hille*, in passenden Stunden.

Zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ladet *Derselbe* ein.

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitbahn der Univ.-Stallmeister *Schweppe*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., Sonnab., Morgens von 8—12 und Nachm. (ausser Sonnab.) von 3—4 Uhr.

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grüneklee*, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Höltzke*.

Oeffentliche Sammlungen.

Die *Universitätsbibliothek* ist geöffnet Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 2 bis 3, Mittwoch und Sonnabend von 2 bis 4 Uhr. Zur Ansicht auf der Bibliothek erhält man jedes Werk, das man in gesetzlicher Weise verlangt; über Bücher, die man geliehen zu bekommen wünscht, giebt man einen Schein, der von einem hiesigen Professor als Bürgen unterschrieben ist.

Ueber den Besuch und die Benutzung des *Theatrum anatomicum*, des *physiologischen Instituts*, der *pathologischen Sammlung*, der *Sammlung von Maschinen und Modellen*, des *zoologischen* und *ethnographischen Museums*, des *botanischen Gartens*, der *Sternwarte*, des *physikalischen Cabinets*, der *mineralogischen* und der *geognostisch-paläontologischen Sammlung*, der *chemischen Laboratorien*, des *archäologischen Museums*, der *Gemäldesammlung*, der *Bibliothek des k. philologischen Seminars*, des *diplomatischen Apparats*, bestimmen besondere Reglements das Nähere.

Bei dem Logiscommissär, Pedell *Fischer* (Burgstr. 42), können die, welche Wohnungen suchen, sowohl über die Preise, als andere Umstände Auskunft erhalten, und auch im voraus Bestellungen machen.

Beilage zu Nr. 18. der Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

Die Meteoriten

der Universitäts-Sammlung zu Göttingen am 1. Januar 1870.

I. Meteorsteine.

	Fall-Zeit		Localität	Gewicht in Grm.*)	
	Datum	Jahr		Haupt-Stück	Zahl der Exempl.
1	7. Nov.	1492	Ensisheim, Elsas	106	5
2	13. Sept.	1766	Albareto bei Modena	—	1
3	20. Nov.	1768	Mauerkirchen, Oestreich . .	1927	2
4	19. Febr.	1785	Eichstädt, Bayern	26	1
5	13. Oct.	1787	Charkow, Russland	32	1
6	24. Juli	1790	Barbotan, Frankreich . . .	95	2
7	16. Juni	1794	Siena, Toscana	17	1
8	13. Dec.	1795	Wold Cottage, England . .	130	2
9	12. März	1798	Salles, Frankreich	1	1
10	13. Sept.	1798	Benares, Indien	4	2
11	26. April	1803	L'Aigle, Frankreich	230	1
12	13. Dec.	1803	Mässing, Bayern	4	1
13	5. April	1804	Glasgow (High Possil), Schottland	1,5	1
14	15. März	1806	Alais, Frankreich	1,5	1
15	13. März	1807	Timochin (Smolensk), Russland	10	2
16	14. Dec.	1807	Weston, Connecticut V. St. . .	10	5
17	19. April	1808	Parma, Italien	—	3
18	22. Mai	1808	Stannern, Mähren	249	3
19	3. Sept.	1808	Lissa, Böhmen	5	1
20	Aug.	1810	Tipperary, Irland	18	1
21	23. Nov.	1810	Charsonville, Frankreich . .	2	2
22	12. März	1811	Kuleschowka, Russland . . .	2	2
23	8. Juli	1811	Berlanguillas, Spanien . . .	2	1
24	15. April	1812	Erxleben, Preussen	295	2
25	5. Aug.	1812	Chantonnay, Frankreich . .	201	3
26	10. Sept.	1813	Limerik, Irland	105	2
27	15. Febr.	1814	Bachmut, Jekaterinoslaw, Russl.	82	1

*) Gewichte unter 1 Gramm sind meist nicht angegeben.

	Fall-Zeit		Localität.	Gewicht in Grm.	
	Datum	Jahr		Haupt-Stück	Zahl der Exempl.
28	5. Sept.	1814	Agen, Frankreich	26	1
29	18. Febr.	1815	Duralla, Indien	17	1
30	3. Oct.	1815	Chassigny, (Langres), Frankreich	5	1
31	Juni	1818	Seres, Macedonien	35,5	3
32	13. Juni	1819	Jonzac, Frankreich	—	1
33	13. Oct.	1819	Politz, (Gera, Köstritz) Reuss .	5	2
34	12. Juli	1820	Lixna, (Dünaburg) Russland .	140	2
35	15. Juni	1821	Juvinas, Frankreich	151	1
36	30. Nov.	1822	Allahabad, Indien	6	1
37	10. Febr.	1825	Nanjemoy, Maryland V. S. . .	5	4
38	14. Sept.	1825	Honolulu, Sandwich-Inseln . .	3,5	1
39	9. Mai	1827	Nashville, Tennessee, V. St. .	5	1
40	5. Oct.	1827	Bialystok, Russland	—	1
41	14. Juni	1828	Richmond, Virginien, V. St. .	6	1
42	8. Mai	1829	Forsyth, Georgia, V. St. . .	1,5	1
43	18. Juli	1831	Vouillé, Frankreich	21	2
44		1832	Umbala, Indien	1,5	1
45	11. Nov.	1836	Macao, Brasilien	10	1
46	18. April	1838	Akbupore, Indien	9	1
47	6. Juni	1838	Chandakapoor, Indien . . .	2,5	1
48	13. Oct.	1838	Capland, (Cold-Bokkeveld), Afrika	5,5	6
49	13. Febr.	1839	Little Piney, Missouri, V. St.	1,5	1
50	12. Juni	1840	Uden, Holland	—	1
51	22. März	1841	Grüneberg, Pr. Schlesien . .	1	2
52	12. Juni	1841	Château-Renard, Frankreich .	324	1
53	26. April	1842	Milena, Croatien	11	2
54	25. März	1843	Bishopsville, Süd-Carolina, V. St.	4	2
55	2. Juni	1843	Utrecht, Holland	1	1
56	16. Sept.	1843	Klein Wenden, (Nordhausen), Pr.	2	3
57	29. April	1844	Killiter, Irland	—	1
58	21. Oct.	1844	Favars, Frankreich	2	1
59	Gefunden	1846	Assam, Asien	—	1
60	25. Febr.	1847	Jowa, Linn County, V. St. . .	48	4
61	20. Mai	1848	Castine, Maine, V. St. . . .	—	1
62	31. Oct.	1849	Cabarras County. Nd. Car., V. St.	30	3
63	30. Nov.	1850	Shalka, Indien	1	2
64	17. April	1851	Gütersloh, Westphalen . . .	1,5	1
65	23. Jan.	1852	Nellore, Indien	36	2
66	4. Sept.	1852	Mezö-Madaras, Siebenbürgen .	37	2
67	Gefunden	1852	Mainz, Hessen	43	2

	Fall-Zeit		Localität.	Gewicht in Grm.	
	Datum	Jahr		Haupt-Stück	Zahl der Exempl.
68	2. Dec.	1852	Busti, New Gorakpnr, Ind. .	1	1
69	10. Febr.	1853	Girgenti, Sicilien	29	1
70	6. März	1853	Segowlee, Indien	1	1
71	13. Mai	1855	Bremervörde, pr. Prv. Hannover	2755	2
72	11. Mai	1855	Insel Ösel, Russland	14	1
73	7, Juni	1855	St. Denis-Westrem, Belgien	50	1
74	5. Aug.	1855	Petersburg, Tennesee, V. St.	9	3
75	*)	1656?	Durango, Mexico	145	1
76	Gefunden	1856	Hainholtz, Westphalen . . .	73	4
77	12. Nov.	1856	Trenzano, Lombardie . . .	2,5	1
78	28. Febr.	1857	Parnallee, Indien	80	3
79	1. April	1857	Heredia, San José, Costa Rica	449	1
80	15. April	1857	Kaba, Ungarn	f	2
81	10. Oct.	1857	Ohaba, Siebenbürgen . . .	9	2
82	27. Dec.	1857	Pegu, Indien	21	1
83	19. Mai	1858	Kakova, Siebenbürgen . . .	14	1
84	9. Dec.	1858	Ausson (Montrejeau), Frankr.	49	2
85	26. März	1859	Harrison County, V. St. . .	17	1
86	1. Mai	1860	New Concord, Ohio, V. St. .	199	2
87	14. Juli	1860	Dhurmsala, Indien	52	1
88	7. Oct.	1862	Meno, Neu Strelitz	—	1
89	2. Juni	1862	Buschhof, Curland	47	1
90	8. Aug.	1862	Pilistfer (Aukoma), Livland .	53	1
91	11. Aug.	1863	Dacca, Bengalen	3,75	1
92	7. Dec.	1863	Turinnes-la-Grosse, Belgien .	57	1
93	22. Dec.	1863	Manbhoom, Bengalen . . .	3,5	1
94	12. April	1864	Nerft, Curland	32	1
95	14. Mai	1864	Orgueil, Frankreich	5	3
96	26. Juni	1864	Dolgaja Wolja, Volhynien, Russl.	34	1
97	21. Juli	1865	Aumale, Algerien	2	1
98	25. Aug.	1865	Shergotty, Behar, Indien . .	1,5	2
99	21. Sept.	1865	Muddoor, Mysore, Indien . .	1	1
100	30. Mai	1866	St. Mesmin, Frankr. . . .	0,6	1
101	9. Juni	1866	Knyahinya, Ungarn	154	4
102	30. Jan.	1868	Pultusk, Warschau	302	2
103	22. Mai	1868	Slavetic, Croatien	4	2
104	1. Jan.	1869	Hessle bei Upsala, Schweden .	174	2
105	5. Mai	1869	Krähenberg, Pfalz	3	2

*) Nachrichten 1867 S. 57.

II. Meteoreisen.

	Fundort	Gewicht in Grm. Haupt-Stück	Zahl der Exempl.
1	Agram, Croatien, gefallen am 26. Mai 1751 .	10	4
2	Braunau, Böhmen, gefallen am 14. Juli 1847 .	108	4
3	Bonanza, Mexico	1,3	1
4	Arva, Ungarn, gefunden 1844	425	7
5	Ashville, Nord-Carolina, V. St. 1839 . . .	0,5	2
6	Atakama, Bolivia, S. A. 1827	1840	5
7	Auburn, Alabama	4	1
8	Bahia (Bemdegó), Brasilien, 1816	257	4
9	Bohumilitz, Böhmen, 1829	31	1
10	Brahin, Russland, 1822	17	1
11	Breitenbach, Böhmen, 1861	111	2
12	Brasilien, (Buenos-Ayres?)	18	1
13	Burlington, New York, V. St. 1819 . . .	62	1
14	Caille, Frankreich, 1828	47	1
15	Capland, Afrika, vom grossen Fischfluss 1837?	14	1
16	Capland, Afrika, 1801	181	4
17	Carthago, Smith County, V. St. 1840 . . .	22	1
18	Chesterville, Süd-Carolina, V. St. 1849 . .	115	1
19	Claiborne, Alabama, V. St. 1838	2,5	1
20	Colorado, Russel Goulch, V. St. 1863 . . .	398	2
21	Colorado, Beear Creek, V. St.	301	2
22	Copiapo, Chili, 1863	11	1
23	Cosby, Cook C. V. St. 1840 (Sevier-Eisen) .	25	2
24	Cranbourne, Australien, 1861	206	3
25	Dacotah, Indian Territory, V. St. 1863 . . .	58	1
26	Denton County, Texas., 1856	26,5	1
27	Durango, Mexico, 1811	50	1
28	Elbogen, Böhmen, 1811	35	4
29	Franklin County, V. St.	56	1
30	Green-County, Tennesee, V. St. 1818 . . .	69	2
31	Grönland, Baffinsbay, 1819	0,4	1
32	Guilford, Nord-Carolina, V. S. 1830 . . .	8,5	1

	Fundort.	Gewicht in Grm.	
		Haupt-Stück	Zahl der Exempl.
33	Jewell Hill, Madison, V. St. 1856	40	2
34	Krasnojarsk, Sibirien, 1776	223	12
35	Lagrange, Oldham C. Kentucky, V. St 1860 .	383	1
36	Lenarto, Ungarn, 1815	51	4
37	Löwenfluss, Süd-Afrika, 1853	5	1
38	Lockport, New-York, V. St. 1845	43	1
39	Madoc, Canada. V. St. 1854	19	1
40	Marshall, C., Kentucky, V. St. 1856 . . .	142	1
41	Milwaukee, Wisconsin, 1858	25	1
42	Nebraska, Missouri, V. St. 1856	0,5	1
43	Nelson, C. Kentucky, V. St. 1856	358	2
44	Nevada, V. St.	6	1
45	Newton, C. Arkansas, V. St. 1860	22	1
46	Oaxaca, Mexico, 1843	3,75	1
47	Obernkirchen, Schaumburg, Preussen 1863 .	180	2
48	Oktibeha, Missisippi, V. St. 1857	1,5	1
49	Orange River, Süd-Afrika, 1856	31	1
50	Paraguay, Paranafluss (Tucuman?)	5	1
51	Petropawlowsk, Sibirien, 1841	7	1
52	Pohlen? aus Berzelius Sammlung	4	1
53	Pittsburg, Pensylvanien, V. St. 1850 . . .	104	2
54	Puttnam, C. Georgia, V. St. 1854	33	1
55	Rasgata, Neu-Granada, 1823	12	1
56	Red River, (Louisiana) Texas 1808	8	2
57	Rittersgrün, Sachsen, 1861	63	1
58	Robertson, C. Tennesee, V. St. 1861 . . .	46	2
59	Ruffs Mountain, Süd Carol., V. St. 1850 . .	36	2
60	Salt River, Kentucky, V. St. 1851	14	1
61	Santa Rosa, Mexico	50	2
62	Sarepta, Saratow, Russland, 1854	20	1
63	Schwetz, Preussen, 1850	48	1
64	Scriba, Oswego C., V. St. 1814	17	2
65	Seeläsgen, Brandenburg, Preuss. 1847 . . .	26	3
66	Sierra de Chaco, Atakama, 1862	12	1
67	Seneca-See, New York, V. St. 1851 . . .	121	1
68	Senegal, Bambuk, Afrika, 1763	1	2
69	Smithland, Livingston C. Kent. V. St 1840 .	8	1
70	Steinbach, Sachsen 1751	10	1
71	Tabarz, Thüringen, 1854	20	1
72	Tazewell, Tennesee, 1854	198	2

	Fundort.	Gewicht in Grm. Haupt-Stück	Zahl der Exempl.
73	Toluca, Mexico, 1784—1856	2025	9
74	Tucuman, Süd-Amerika, 1783	0,5	1
75	Tuczon, Mexico, 1850	17	1
76	Tula, Russland, 1857	7	1
77	Union, C., Georgia, V. St. 1853	14	1
78	Virginien, aus einer Petroleumquelle	1,7	1
79	Wayne, Ohio, V. S. 1859	1,5	1
80	Werknoi-Udinsk, Sibirien, 1854	15	1
81	Zacatecas, Mexico, 1792	58	3
	Zweifelhafte.		
	Grönland, (Niakornak?)	34	1
	Hemalga, Chili, 1840	31	2
	Hommoney Creek, Nord-Carol. V. St. 1845 .	195	1
	Newstead, Schottland, 1861	68	2

Wöhler.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

August 17. **№ 19.** 1870.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 6. August.

Wicke, über die Zusammensetzung und den Nährwerth essbarer Pilze.

Kohlrausch, über eine von Herrn E. Riecke im physikal. Institut ausgeführte experiment. Prüfung des Neumannschen Gesetzes über d. Magnetismus d. Rotationsellipsoide.

Derselbe, Bestimmung einiger hydro- und thermoelektromotorischer Kräfte.

Wöhler, Analyse des Pyrosmaliths.

Clebsch, zur Theorie der binären algebraischen Formen.

Ueber die Zusammensetzung und den Nährwerth essbarer Pilze.

Von

Wilh. Wicke.

Schlossberger und Doepping haben im Jahre 1844 eine Arbeit „Chemische Beiträge zur Kenntniss der Schwämme" geliefert[1]), in welcher sie von den betreffenden Pilzen die Trockensubstanz, den Stickstoff- und Aschen-Gehalt bestimmt haben. Es kommen unter den untersuchten Pilzen auch mehrere essbare vor. Diese Arbeit rechtfertigte die von den Pilzen schon lange gehegte günstige Meinung, dass sie, ihres grossen Stickstoffgehaltes wegen, einen bedeutenden Nährwerth hätten. Das Ergebniss ihrer Untersuchungen fassen die Verf. in folgender

1) Annalen der Chem. u. Pharmac. Bd. LII. H. 1. S. 106.

Stelle zusammen: „Die an Stickstoff ärmsten Schwämme nähern sich den stickstoffreichsten vegetabilischen Nahrungspflanzen, so den Erbsen und Bohnen, deren Stickstoff nach Boussingault in der trocknen Frucht 3--5 Proc. beträgt. Von dem Stickstoff-Gehalt des Weizens enthalten die meisten Schwämme (bei 100° getrocknet) das doppelte oder dreifache.“ Den höchsten Stickstoffgehalt fanden sie bei Agaricus arvensis, Schäff (Champignon): 7.26 Proc. — entsprechend einen Gehalt an Proteinsubstanzen von 45.37 Proc. — den niedrigsten bei Daedalea quercina, Pers. (Eichen-Wirrschwamm): 3.19 Proc. = 19.93 Proc. Proteinsubstanzen.

Es ist zu berücksichtigen, dass die Pilze in frischem Zustande einen grösseren Wassergehalt haben, als die meisten andern vegetabilischen Nahrungsmittel. So wurde bei obigen Untersuchungen im Boletus aureus, Sch. ein Wassergehalt von 94.25 Proc. gefunden. Agaricus doliciosus, L. (Aechter Reizker) enthielt 86.9 Proc. Wasser. Dieser sehr geschätzte Pilz wird nach Lenz überall für die Küche gesammelt. Ich habe von dem bekannten essbaren Eierschwamm Agricus Cantharellus, L. eine Wasserbestimmung in frischem Zustande ausgeführt und 92.02 Proc. Wasser erhalten. Das bedeutende Schwinden der Substanz beim Trocknen der Pilze, für eine längere Aufbewahrung, lässt schon den beträchtlichen Wassergehalt erkennen.

Ueber den Aschengehalt geben Schlossberger und Doepping an, dass sie bei Agaricus Cantharellus den grössten Gehalt : 11.2 Proc., bei Boletus fomentarius L. (Zunderpilz), den niedrigsten: 3.0 Proc. gefunden. Es wird nicht gesagt, ob die Asche auch von den ihr so leicht anhängenden verunreinigenden erdigen Bestand-

theilen befreit worden. Meine Bestimmung ergab bei dem zuerst erwähnten Pilz nur 8.19 Proc. Immerhin ein so grosser Gehalt an Asche, dass unsere andern vegetabilischen Nahrungsmittel darin weit von den Pilzen übertroffen werden, da z. B. Weizen und Roggen nur 2.0 Proc., Erbsen: 2.5 Proc. Asche liefern. Aus dem grossen Gehalt an Asche, und namentlich aus der qualitativen Zusammersetzung derselben, lassen sich wichtige Schlussfolgerungen für den Nährwerth der Pilze ziehen. Sch. und D. erwähnen in der Beziehung nur, dass die Pilzaschen sehr reich an Phosphorsäure und dass auch in diesem Falle ein grosser Phosphorsäure-Gehalt mit einem grossen Stickstoff-Gehalte correspondire.

Fast alle über die Pilze angestellten Untersuchungen erwähnen des Mannits, als eines in diesen Pflanzen in ansehnlicher Menge vorkommenden Bestandtheils. Man hat früher geglaubt, dass den Pilzen eine besondere Zuckerart eigenthümlich sei, die man deshalb auch „Schwammzucker" nannte. Man überzeugt sich leicht von der Gegenwart des Mannits in den Pilzen. Das von ihnen nach längerem Kochen abgegossene Wasser erstarrt zu einer Krystallmasse, wenn man es durch Eindampfen concentrirt hat.

Früher nahm man, nach den von Braconnot über die Pilze angestellten Untersuchungen auch an, dass in den Pilzen zwei eigenthümliche Säuren: die Boletsäure und die Pilz- oder Schwamm-Säure, so wie eine besondere Modification der Cellulose, die von der gewöhnlichen Cellulose durch einen Stickstoff-Gehalt unterschieden sei, und die von Braconnot als Fungin in die Pflanzenphysiologie eingeführt wurde, vorkämen. Spätere Untersuchungen haben aber gezeigt, dass alle drei Körper nicht existiren.

Wurde von Bolley[1]) die Boletsäure als Fumarsäure erkannt, und bestätigte später Dessaignes die Boley'sche Untersuchung als richtig, so lieferten Gobley und Lefort, die auch in Ag. campestris Fumarsäure und keine Boletsäure fanden, den Beweis, dass die Pilzsäure Braconnot's die gewöhnliche Apfelsäure sei. Schon L. Gmelin hatte vermuthet, dass es sich so mit der Boletsäure verhalten werde.

In Betreff des Fungins bewies Payen, dass, wenn man eine von anhängenden fremdartigen Bestandtheilen vollständig befreite Cellulose der Pilze untersuche, letztere keine Abweichung von der Zusammensetzung der gewöhnlichen Cellulose anderer Pflanzen zeige. Bevor noch diese Berichtigung erfolgt war, sah man in dem stickstoffhaltigen Fungin ein Merkmal, welches die Pilze als ein Mittelglied zwischen den Pflanzen und Thieren erscheinen liess. Man kann ihnen diese Stellung allerdings anweisen; aber man muss dann andere chemische Merkmale zu Hülfe nehmen.

Ueber die giftig wirkenden Stoffe in verschiedenen, für die Gesundheit als nachtheilig bezeichneten Pilze, sind wiederholt Untersuchungen angestellt, die ich aber um so mehr mit Stillschweigen übergehen kann, weil sie weder ein positives Resultat ergeben haben, noch mit meinem Thema in einer näheren Beziehung stehen.

Schon vor drei Jahren veranlasste ich Otto Kohlrausch eine Untersuchung mehrerer essbarer Pilze vorzunehmen[2]) und dabei die jetzt

1) „Beiträge zur Kenntniss der in den Schwämmen enthaltenen Säuren.“ Annalen der Chemie und Pharmacie Bd. LXXXVI. H. 1 S. 44. 1853.

2) Dessen Dissertation: „Ueber die Zusammensetzung einiger essbarer Pilze.“ Göttingen, 1857.

in Anwendung kommenden Methoden für die Bestimmung des Nahrungswerthes ebenfalls zu benutzen, um so den Nahrungswerth der Pilze mit dem anderer Nahrungsmittel vergleichen zu können. Als eine Fortsetzung der von Kohlrausch unternommenen, ist die jetzt von O. Siegel ausgeführte Untersuchung anzusehen, die sich auf folgende fünf Species bezieht: Boletus edulis, Bull. (Herren- oder Steinpilz). Agaricus Cantharellus, L. (Eierschwamm, Pfifferling). Clavaria flava, Schäff. (Hirschschwamm, Hahnenkamm). Morchella esculenta, Pers. (Gemeine Morchel). Tuber cibarium, Sibthorp. (Schwarze Trüffel).

Die erstgenannten drei Pilze wurden im Plesswalde im vorigen Spätsommer gesucht. Boletus edulis kam in geschältem Zustande zur Verwendung. Die Morcheln waren in der Umgegend von Clausthal, die Trüffeln in der Gegend von Dassel gewachsen. Sie werden dort von einem Einwohner der die „Jagd“ gepachtet hat in ansehnlicher Menge gesucht und verschickt. Die Jagd darauf wird bekanntlich Ende Winters exercirt. Da leicht Schimmeln eintritt, so wurde das Material frisch untersucht. Die übrigen Pilze, auf deren tadellose Beschaffenheit besonders geachtet wurde, blieben so lange an der Luft liegen, bis sie den Grad von Sprödigkeit erlangt hatten, dass sie sich mahlen liessen. Das Mehl wurde dann in wohlverschlossenen Gläsern aufbewahrt. In diesem Zustande hat eine längere Aufbewahrung durchaus keine nachtheiligen Folgen für die Substanz.

Die folgende Tabelle enthält eine detaillirte Zusammenstellung der durch die Analyse gefundenen Werthe.

	Boletus edulis.	Agaricus Cantharellus.	Clavaria flava.	Morchella esculenta.	Tuber cibarium.
Wasser . . .	15.42%	16.48%	21.43%	15.81%	70.83%
Trockensubstanz	85.58 „	83.52 „	78.57 „	84.19 „	29.17 „
In 100 Theilen Trockensubstanz:					
Proteinsubstanzen	22.82 „	23.43 „	24.43 „	33.90 „	36.32 „
Mannit . . .	5.14 „	10.68 „	7.81 „	7.48 „	—
Fett	1.98 „	1.38 „	2.13 „	1.71 „	2.48 „
Extractivstoffe .	57.29 „	46.85 „	48.94 „	40.59 „	23.16 „
Holzfaser . . .	6.55 „	9.47 „	6.94 „	6.58 „	28.31 „
Asche	6.22 „	8.19 „	9.75 „	9.74 „	9.73 „
	100.00	100.00	109.00	100.00	100.00
In 100 Theilen Asche:					
Kieselsäure . .	1.46 „	1.24 „	1.50 „	0.02 „	0.50 „
Schwefelsäure .	13.32 „	8.02 „	3.40 „	5.20 „	1.53 „
Phosphorsäure .	20.12 „	31.32 „	35.07 „	37.75 „	30.85 „
Chlor	1.07 „	1.14 „	3.02 „	0.19 „	0.04 „
Eisenoxyd . .	2.47 „	2.52 „	2.00 „	1.43 „	2.32 „
Manganoxydoxydul	— „	0.63 „	0.25 „	0.05 „	—
Magnesia . . .	5.21 „	4.04 „	0.75 „	3.99 „	6.51 „
Kali	50.95 „	48.75 „	51.47 „	50.04 „	55.97 „
Natron . . .	3.31 „	2.26 „	2.28 „	1.13 „	1.32 „
Rückstand (Sand, Thon) . . .	1.81 „	1.30 „	0.35 „	0.30 „	0.94 „
	99.72 „	101.22 „	100.09 „	100.10 „	99.98 „
Ab die dem Chlor entsprechende Menge Sauerstoff	0.24 „	0.25 „	0.68 „	0.04 „	
	99.48	100.97	99.41	100.06	99.98
In 100 Theilen wasserhaltiger Substanz:					
Proteinsubstanzen	19.30 „	19.56 „	19.19 „	28.58 „	9.59 ,
Mannit . . .	4.34 „	8.91 „	5.57 „	6.29 „	—
Fett	1.67 „	1.15 „	1.67 „	1.43 „	0.72 „
Extractivstoffe .	48.45 „	39.12 „	38.45 „	34.17 „	6.75 „
Holzfaser . . .	5.54 „	7.91 „	5.45 „	5.53 „	8.25 „
Kieselsäure . .	0.09 „	0.08 „	0.11 „	Spur „	0.01 „
Schwefelsäure .	0.70 „	0.60 „	0.26 „	0.43 „	0.05 „
Phosphorsäure .	1.06 „	2.41 „	2.68 „	2.09 „	0.87 „
Chlor	0.06 „	0.07 „	0.02 „	0.02 „	Spur „

	Boletus edulis.	Agaricus Cantharellus.	Clavaria flava.	Morchella esculenta.	Tuber cibarium.
Eisenoxyd . .	0.70%	0.17%	0.15%	0.12%	0.06%
Manganoxydoxydul	—	0.04 „	0.02 „	Spur „	—
Magnesia . . .	0.27 „	0.27 „	0.06 „	0.32 „	0.18 „
Kali	2.68 „	3.33 „	3.94 „	4.10 „	1.59 „
Natron . . .	0.17 „	0.11 „	0.17 „	0.09 „	0.04 „
Rückstand (Sand, Thon) . . .	0.09 „	0.08 „	0.03 „	0.02 „	0.02 „
Wasser . . .	15.42 „	16.48 „	21.43 „	15.81 „	70.83 „
	100.54	100.29	99.20	99.00	99.96

Legen wir für die Beurtheilung des Nahrungswerthes der Pilze, und zu einer Vergleichung derselben mit dem Nahrungswerthe anderer vegetabilischen Nahrungsmittel, zunächst den Proteingehalt zu Grunde, so erscheint dieser bei allen bisher untersuchten Pilzen ausserordentlich hoch. Auf Trockensubstanz berechnet, ist derselbe bei der Trüffel am höchten, darnach bei der Morchel. Für die Vergleichung mit andern, ihrer Nahrhaftigkeit wegen besonders geschätzten Nahrungsmitteln, führe ich an, dass der Proteingehalt beim Roggen 12.82 Proc., beim Weizen 15.18 Proc., bei den Erbsen 26.13 Proc., bei den Linsen 27.83 Proc. beträgt, die Substanzen in wasserfreiem Zustande genommen. Folglich schliessen sich die Pilze in ihren stickstoffhaltigen Nährstoffen den, ihrer Nahrhaftigkeit wegen so hochgeschätzten Früchten der Leguminosen an. Daher ist es auch ein durchaus gerechtfertigter Wunsch, dass es gelingen möge, die Pilze durch die Cultur zu einem wirklichen Volksnahrungsmittel zu machen. Der ärmeren Volksclasse könnte dadurch eine ausseoordentlich nahrhafte Speise geboten werden, die gewissermassen einen Ersatz für Fleisch liefern würde.

Das Verhältniss der stickstoffhaltigen zu den stickstofffreien Nährstoffen stellt sich bei den folgenden Nahrungsmitteln so:

Weizenmehl	1 : 6.24
Roggenmehl	1 : 6.08
Erbsen	1 : 2.30
Linsen	1 : 2.18
Boletus edulis . . .	1 : 2.82
Agaricus Cantharellus	1 : 2.51
Claveria flava . . .	1 : 2.41
Morchella esculenta .	1 : 1.47
Tuber cibarium . . .	1 : 0.76

Von wesentlicher Bedeutung für die Ernährung ist ferner die Quantität und Qualität der in den Nahrungsmitteln enthaltenen Nährsalze. Auf die ungewöhnlich grosse Menge der Asche, welche die Pilze liefern, habe ich schon hingewiesen. Die Qualität der Aschenbestandtheile betreffend, so hat Liebig wiederholt, ganz besonders aber in seiner Kritik des Fleischextrakts, auf die grosse Bedeutung derjenigen Nährsalze hingewiesen, welche vorzugsweise Kali und Phosphorsäure enthalten. Diess ist nun bei den Nährsalzen der Pilze der Fall und auch aus diesem Grunde könnte man sie für einen Ersatz des Fleisches ansehen. Der Kaligehalt in der Asche steigt von 48 bis 56 Proc., der Phosphorsäuregehalt von 20—37 Proc. Wir haben in der Asche von Ochsenfleisch 35.9 Proc. Kali und 34.4 Proc. Phosphorsäure, in der vom Roggen 32.7 Proc. Kali und 47.3 Proc. Phosphorsäure, in der Asche von Erbsen 39.5 Proc. Kali und 34.5 Proc. Phosphorsäure.

Von diesen für die Ernährung wichtigen und unentbehrlichen Nährsalzen geht beim längeren Kochen der Pilze ein beträchtlicher Theil in das Wasser über, der behufs einer leichten und nor-

malen Verdauung mit den organischen Substanzen dem Körper zugeführt werden müsste. Auch wird, wie schon bemerkt, ein grosser Theil des Mannits durch das Kochwasser ausgezogen. Es findet also eine bedeutende Verminderung des Nährwerths durch die extrahirten Bestandtheile statt. Gehen diese Stoffe verloren, so vertheuert sich dadurch nicht allein die Speise, sondern es muss nothwendig auch das Gegentheil von dem eintreten, was man durch das Kochen erreichen will. Die Speisen sollen dadurch verdaulicher werden, sie werden aber durch die entzogenen Nährstoffe und Nährsalze unverdaulicher, wenigstens büssen sie erheblich an Effekt für die Ernährung ein.

Bei einer Art der Zubereitung der Pilze wird der wässerige, durch längeres Kochen erhaltene Auszug nicht weiter benutzt; dies geschieht dann, wenn die Pilze mit Essig und Gewürz eingemacht werden, um später als Compot zu dienen. Man könnte ebenso gut ausgekochtes Fleisch einmachen und die Fleischbrühe weggiessen. Wie die eingedickte Fleischbrühe den Fleischextrakt liefert, der sich als kräftig schmeckende Zuthat zu andern Speisen bewährt hat, so kann man einen ähnlichen Extrakt auch aus den Pilzen gewinnen, der sich, bei sonst richtiger Behandlung, sehr lange unverändert hält. Bauersleute, die sich in der Umgegend von Göttingen mit dem Sammeln und Verkauf von Pilzen beschäftigen, benutzen bereits die beim Schälen gewonnenen Abfälle für die Gewinnung eines solchen Extrakts, der sich bis in den Winter hinein in Flaschen aufbewahren lässt und dessen kräftigen Geschmack sie nicht genug zu rühmen wissen.

Beispielsweise will ich nur anführen, dass

die 23.48 Proc. betragenden, durch längeres Kochen mit Wasser ausgezogenen Aschenbestandtheile bei Agaricus Cantharellus enthielten:

Kali	12.32	Proc.
Natron	0.04	„
Phosphorsaures Eisenoxyd	1.48	„
Phosphorsaure Magnesia .	3.96	„
Phosphorsäure	5.68	„
	23.48	Proc.

Mittheilung einer von Herrn E. Riecke im physikalischen Institut ausgeführten experimentellen Prüfung des Neumann'schen Gesetzes über den Magnetismus der Rotationsellipsoide.

von

F. Kohlrausch.

Die allgemeinste Gestalt, für welche es bis jetzt gelungen ist den durch eine gegebene Scheidungskraft inducirten Magnetismus zu berechnen, ist das Rotationsellipsoid. Neumann hat für den Fall, dass in der Richtung der Rotationsaxe eine magnetische Scheidungskraft T auf ein homogenes Ellipsoid vom Volumen v wirkt, den durch diese Kraft inducirten Magnetismus M unter der Form

$$M = \frac{k\,v\,T}{1 + k\,P}$$

dargestellt.

Hier bedeutet P einen von dem Axenverhältniss abhängigen Factor, welcher sich für sehr gestreckte Ellipsoide der Null nähert. k ist die

magnetische Constante der Substanz und kann nach der Formel betrachtet werden als der Magnetismus, welchen ein sehr dünner Stab von der Einheit des Volumens unter der magnetischen Scheidungskraft Eins annimmt.

Dieses Gesetz hat freilich in so fern eine Beschränkung erfahren, als durch die Untersuchungen Müller's und Weber's der Beweis geführt worden ist, dass die Proportionalität zwischen Kraft und Magnetismus nur für schwächere Kräfte stattfindet, dass also nur für diese die Grösse k als constant betrachtet werden kann. Gerade dieser Fall ist aber von Interesse, und praktisch lassen sich Verhältnisse herstellen, in denen diese Grenze der Gültigkeit innegehalten wird und nichts destoweniger eine scharfe Messung der Kräfte und ihrer Wirkungen möglich ist. Eine Prüfung des Neumann'schen Gesetzes an der Erfahrung ist bis jetzt nicht vorgenommen, während dieselbe doch als sehr wichtig bezeichnet werden muss, einmal weil dadurch eine Prüfung der diesem Gesetze zu Grunde liegenden Vorstellungen über die Natur des Magnetismus erreicht wird, und zweitens, weil man praktisch oft in der Lage ist, das Gesetz als Näherungsregel anzuwenden.

Einer solchen Prüfung hat sich Herr Riecke unterzogen und ich theile hier die vorläufigen Resultate seiner durch die Zeitverhältnisse vor ihrer letzten Vollendung unterbrochenen Untersuchung mit.

Es wurden durch Herrn Mechanicus Apel nach Zeichnung sieben Ellipsoide von verschiedenem Volumen und Axenverhältniss hergestellt, das Volumen zwischen 40 und 180 Cub. Cm., das Axenverhältniss zwischen 4 und 12 wechselnd. Alle Stücke waren aus einem und demselben Stabe

weichsten Schmiedeeisens gedreht, und zwar, um eine etwaige locale Verschiedenheit zu eliminiren, in einer, nach den Axenverhältnissen möglichst wechselnden Reihenfolge. Diese schwierige Herstellung ist von Herrn Apel in sehr befriedigender Weise ausgeführt worden, wie sich nachher aus dem nach den gemessenen Axen berechneten und dem durch den Gewichtsverlust im Wasser beobachteten Volumen ergab. Dass der Eisenstab gut homogen war folgt aus der Uebereinstimmung der specifischen Gewichte, die nur zwischen 7,774 und 7,786 schwanken.

Nach Weber's Methode (Abh. der Soc. 6. Band) wurden die durch die verticale Componente des Erdmagnetismus in den Ellipsoiden inducirten magnetischen Momente gemessen, was bekanntlich durch den galvanischen Strom geschieht, welchen im Augenblick des Entstehens dieser Magnetismus in einer Drahtspirale inducirt. Diese Methode gewährt den Vortheil, erstens dass man mit schwachen Kräften arbeitet, für welche die Abweichung der Grösse k von einer Constanten noch nicht eintritt, und zweitens, dass die Grösse der Kraft selbst gar nicht bekannt zu sein braucht, indem alle für die absolute Bestimmung nöthigen Zahlen aus den Dimensionen der Spirale und aus den Versuchszahlen selbst entnommen werden. Zugleich ist damit eine grosse Genauigkeit verbunden, die sich auch diessmal bei den Beobachtungen ergeben hat.

Die Resultate von Herrn Riecke's Untersuchungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Die Ellipsoide sind hier angeordnet nach dem Axenverhältniss a (Rotationsaxe dividirt durch Aequatoraxe). Die römischen Ziffern bedeuten die Reihenfolge, in welcher die Stücke aus dem Stabe herausgeschnitten waren, v ist

das Volumen in Cubikmillimetern, M der durch die Einheit der magnetisirenden Kraft in dem Ellipsoide inducirte Magnetismus. Aus a, v und M ist dann die Neumann'sche Constante k berechnet.

Nr.	a	v	M	k
I	3,98	97700	95000	13,5
VII	4,93	126900	162200	14,6
II	5,93	146900	241100	17,5
V	6,94	174600	353500	18,4
III	8,86	44100	125000	21,6
VI	10,79	82900	297400	19,2
IV	12,04	55200	239600	25,4

Hieraus ist ersichtlich, dass die Zahl k, welche nach der Theorie eine Constante der betreffenden Eisensorte sein soll, aus den Versuchen, nach Neumann's Formel berechnet, nicht constant ausfällt. Sie ergibt sich aus dem gestrecktesten Ellipsoid fast zweimal so gross wie aus dem kürzesten. Es sind also die Voraussetzungen, aus denen Neumann das Gesetz das in einem Ellipsoide inducirten Magnetismus entwickelt hat, in unserem Falle nicht in der Natur vorhanden gewesen. Ohne einer weiteren von Hrn. Riecke beabsichtigten theoretischen Verfolgung des Gegenstandes vorzugreifen, bemerke ich nur, dass die für k gefundenen Zahlen sich, mit einziger Ausnahme der vorletzten, genau nach der Reihenfolge des Axenverhältnisses anordnen. Ein Zusammenhang des berechneten k mit dem Orte, an welchem das Ellipsoid aus dem Stabe herausgeschnitten war, ist nicht zu erkennen, also eine Verschiedenheit der Eisensorten nicht zu vermuthen. Ebensowenig scheint eine Abhängigkeit von v vorhanden zu sein.

Ueber einige hydro- und thermoelektromotorische Kräfte, zurückgeführt auf Siemens'sches Widerstandsmaass und Weber'sches Strommaass;

von

F. Kohlrausch.

Die vorliegende Arbeit habe ich mit Herrn H. Ammann gemeinsam ausgeführt. Sie betrifft die elektromotorischen Kräfte des Grove'schen und des Daniell'schen Elements, der Combination Kupfer-Zink in verdünnter Schwefelsäure und der Thermoelemente Neusilber-Kupfer, Kupfer-Eisen und Neusilber-Eisen. Wo nichts anderes bemerkt ist, sind die Bestimmungen nach der Poggendorff'schen Compensationsmethode ausgeführt. Die elektromotorischen Kräfte e werden durchweg ausgedrückt nach dem Ohm'schen Gesetze $e = w \cdot i$, wobei der Widerstand w in Siemens'schen Quecksilbereinheiten und die Stromstärke i in der von Weber eingeführten sogenannten magnetischen Stromeinheit ausgedrückt ist. Ich werde die so gemessenen elektromotorischen Kräfte kurz durch Siemens.Weber bezeichnen.

Zur Messung der elektromotorischen Kräfte der Hydroketten diente eine Tangentenbussole von 24 Windungen mit einem mittleren Durchmesser von 258,4 Millimeter. Die Windungen bildeten eine Lage mit rechteckigem Querschnitt von 27 Mm. Breite und 9,4 Mm. Höhe. Die Magnetnadel war ein rechteckiger Magnet von 20 Mm. Länge mit angesetzten Zeigern.

Ich will eine für galvanometrische Bestimmungen häufig anwendbare Formel für eine

solche Tangentenbussole mit Rücksicht auf die Correctionen erster Ordnung mittheilen.

Nennt man r den mittleren Halbmesser der n kreisförmigen Windungen, die zusammen eine Lage mit rechteckigem Querschnitt von der Breite $2a$ und der Höhe $2b$ bilden, ist endlich $2l$ der Abstand der Pole der Nadel von einander (unter Pol den Schwerpunct des freien einseitigen Magnetismus verstanden), so lässt sich die Stromstärke nach magnetischem Maasse durch Formel ausdrücken

$$i = \frac{rT}{2n\pi}\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}-\tfrac{1}{3}\frac{b^2}{r^2}-\tfrac{3}{4}\frac{l^2}{r^2}\right)\operatorname{tang}\varphi\left(1+\tfrac{15}{4}\frac{l^2}{r^2}\sin^2\varphi\right).$$

Hier bedeutet T die horizontale Intensität des Erdmagnetismus und φ den Ablenkungswinkel, welchen der Strom i hervorbringt. Vorausgesetzt ist, dass a, b und l klein gegen r sind.

Die Intensität des Erdmagnetismus am Beobachtungsorte wurde mit derjenigen im hiesigen magnetischen Observatorium verglichen und demgemäss aus der Säcularformel für Göttingen bestimmt. Es fand sich so $T = 1{,}902$. Als Polabstand der Nadel wurde 19^{mm} angenommen. Demnach war für diese Tangentenbussole

$$i = 1{,}631 \,.\, \operatorname{tang}\varphi\,(1 + 0{,}020 \,.\, \sin^2\varphi).$$

Als Rheostat diente eine Siemens'sche Scale, die mit neuen Etalons verglichen worden war.

Nach der Compensationsmethode fanden sich die elektromotorischen Kräfte:

1) Grove'sches Element, das heisst: Platin, concentr. Salpetersäure, Schwefelsäure von 1,06

spec. Gew., frisch analgamirtes Zink

= 19,98 Siem. Web.

2) Daniell'sches Element, d. h. Kupfer, concentr. Kupfervitriol, Schwefelsäure, Zink (wie oben)

= 11,71 Siem. Web.

3) Kupfer, Schwefelsäure, Zink (wie oben)

= 10,82 Siem. Web.

Die erstere elektromotorische Kraft des Grove'schen Elements wurde ausserdem nach der sog. Ohm'schen Methode, durch Messung zweier Stromstärken mit Einschaltung verschiedener bekannter Widerstände, = 19,09 Siem. Web. gefunden, worin sich die bekannte Schwächung der elektromotorischen Kraft durch den Strom selbst ausspricht, obwohl die angewandten Stromstärken nur 1,7 resp. 0,9 Web. betrugen,

Bei der Ohm'schen Methode werden die Fehler, welche bei dem Gebrauch einer längeren Nadel aus der Ungültigkeit des Tangentengesetzes entspringen, besonders empfindlich. Es mag daher bemerkt werden, dass man sie vermeidet, wenn man zu den beiden Ausschlägen der Nadel complementäre Winkel wählt. Verbunden mit der Regel für die Genauigkeit, dass der eine Strom ungefähr die doppelte Stärke des anderen haben soll, ergiebt sich hieraus, dass es am Vortheilhaftesten ist, Winkel von 35 und 55° anzuwenden, womit zugleich der dritten Bedingung einer möglichst genauen Strommessung genügt wird.

Die thermoelektromotorischen Kräfte wurden durchaus nach der Compensationsmethode

bestimmt. Mit Hülfe der im Vorigen bereits gemessenen elektromotorischen Kraft Grove und der grossen Widerstände, welche auf der Siemens'schen Scale disponibel waren, wurde der Reductionsfactor eines sehr empfindlichen Spiegelgalvanometers auf Weber'sches Strommaass festgestellt. Ein zweites Galvanoskop mit astatischer Nadel sowie die Siemens'sche Scale diente bei den Versuchen selbst, um den Strom im Thermoelement auf Null zurückzuführen. Siemens'sche Etalons von 1 bis 4 Einheiten wurden in den Schliessungszweig des Galvanometers eingeschaltet.

Der Widerstand des Galvanometers selbst wurde auf einfache Weise gemessen, indem man einmal das logarithmische Decrement λ der schwingenden Nadel bestimmte, wenn der Multiplicator in sich geschlossen war, und ferner das Decrement λ', nachdem in den Schliessungskreis ein bekannter Widerstand w' hinzugefügt worden war; ausserdem war das logar. Decr. λ_0 bei geöffneter Kette bekannt. Dann ist nämlich der gesuchte Widerstand w des Multiplicators

$$w = w' \frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda - \lambda'}.$$

Die untersuchten Metalle waren in hartgezogenen Drähten von etwa 1 Mm. Durchmesser gegeben. Das Kupfer ist elektrolytisch dargestellt.

Die Resultate finden sich in folgenden Formeln. Wenn nämlich die eine Löthstelle eine Temperatur von etwa 16° C. hat, die andere gegen diese um eine Temperaturdifferenz t erwärmt wird, so wird nach den Beobachtungen die elektromotorische Kraft e dargestellt, als Einheit Siemens.Weber gesetzt,

Neusilber Kupfer:

$$e = 0{,}0001549 \,.\, t + 0{,}000000291 \,.\, t^2$$

Kupfer Eisen:

$$e = 0{,}0000969 \,.\, t - 0{,}000000149 \,.\, t^2$$

Neusilber Eisen:

$$e = 0{,}0002476 \,.\, t + 0{,}000000196 \,.\, t^2.$$

Die sehr gute Uebereinstimmung dieser drei durch Beobachtung gefundenen Ausdrücke (der letztere ist fast genau die Summe der beiden ersteren) liefert zugleich eine Bestätigung des thermoelektromotorischen Grundgesetzes. Die Differenzen sind kleiner als die möglichen Versuchsfehler.

Mit welcher Genauigkeit diese Ausdrücke die Beobachtungen selbst wiedergeben, zeigt folgende Vergleichung einiger durch Beobachtung erhaltener und nach den Formeln berechneter elektromotorischer Kräfte:

	t	e beob.	e ber.
Neusilber-Kupfer.	59°,00	0,010156	0,010155
	38,27	0,006348	0,006356
	32,40	0,005335	0,005326
Kupfer-Eisen.	51°,07	0,004561	0,004560
	34,67	0,003193	0,003180
	29,77	0,002739	0,002752
Neusilber-Eisen.	66°,45	0,01725	0,01732
	55,75	0,01453	0,01441
	43,07	0,01105	0,01103
	32,80	0,00825	0,00833
	21,80	0,00546	0,00549

Zur Theorie der binären algebraischen Formen.

Von

A. Clebsch.

Die Gesammtheit aller zu einer gegebenen binären Form f $n$ter Ordnung [1]) gehörigen algebraischen Formen kann man unter zwei Gesichtspunkten betrachten, um sie auf eine möglichst kleine Zahl von Hauptformen zu reduciren.

Einmal kann man nach dem kleinsten System von Formen fragen, durch welche alle zu f gehörigen Covarianten und Invarianten sich als ganze Functionen mit rein numerischen Coëfficienten ausdrücken. Diese Frage ist durch die Arbeiten von Hrn. Gordan beantwortet worden; wo sich denn gezeigt hat, dass dies System ein endliches sei, für dessen Bildung alle Hülfsmittel bekannt sind, und bei dem nur noch die letzte Ausscheidung etwa überflüssiger Formen Schwierigkeiten machen kann.

Der zweite Gesichtspunkt ist schon durch die Arbeiten von Hermite entwickelt worden. Es handelt sich darum, alle Covarianten und Invarianten von f rational durch eine gewisse Anzahl derselben auszudrücken, wobei denn im Nenner immer nur Potenzen einer und derselben Covariante oder Invariante vorausgesetzt werden. Hermite's Theorie der associirten Formen führt zur Beantwortung dieser Frage. Man erhält ein einfaches System associirter

---

1) Es ist hier nur von einer Grundform die Rede, um die Ausdrucksweise zu vereinfachen; doch kann man das Folgende natürlich sofort auf simultane Formen ausdehnen.

Formen, d. h. solcher Formen, durch welche alle andern sich rational ausdrücken, bekanntlich auf folgende Weise. Sei $f = f(x_1, x_2)$ die gegebene Form, sei ferner

$$\xi = \frac{1}{n}\left(y_1 \frac{df}{dx_1} + y_2 \frac{df}{dx_2}\right)$$
$$\eta = x_1 y_2 - y_1 x_2;$$

man kann dann die y linear durch ξ, η ausdrücken, und erhält

$$1 \ldots f^{n-1} . f(y_1 y_2) = \xi^n + \frac{n . n-1}{1.2} \varphi_2 \xi^{n-2} \eta^2$$
$$- \frac{n . n-1 . n-2}{1.2.3} \varphi_3 \xi^{n-3} \eta^3 + \ldots .$$

Bildet man nun aus dieser Gleichung Covarianten oder Invarianten von $f(y_1 y_2)$ und setzt in ihnen $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ ($\eta = 0$, $\xi = f$), so ergeben sich alle zu f gehörige Formen als rationale Functionen der n Formen $f, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_n$, wobei im Nenner immer nur eine Potenz von f steht.

Ich musste diese Verhältnisse kurz entwickeln, um einen Satz verständlich zu machen, den ich schon im vorigen Sommer gefunden habe, an dessen Veröffentlichung ich aber bisher durch andere Arbeiten gehindert wurde.

Dass zwischen den Covarianten f, φ_2, $\varphi_3 \ldots$ allgemein keine Relationen mit rein numerischen Coëfficienten bestehen können, übersieht man sofort. Aber es entsteht die Frage, ob es nicht möglich sein sollte, diese Covarianten selbst durch eine Reihe absolut einfachster Covarianten rational so darzustellen, dass immer nur wieder Potenzen von f in den Nennern erschei-

nen. Und dies ist in der That möglich. Man kann nämlich folgenden Satz beweisen, welcher den Gegenstand dieser Mittheilung bildet:

Sind in symbolischer Darstellung

$$\psi_1 = (ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2}$$
$$\psi_2 = (ab)^4 a_x^{n-4} b_x^{n-4}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

die zu f gehörigen Covarianten, welche vom 2ten Grade in den Coëfficienten von f sind, so kann man die Formen $\varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$ (und also überhaupt alle Covarianten und Invarianten von f) rational durch f, die ψ und die Functionaldeterminanten der ψ gegen f ausdrücken, und zwar erscheinen dabei in den Nennern immer nur Potenzen von f.

Man sieht aus diesem Satze, dass die Formen ψ nebst f und ihren Functionaldeterminanten gegen f das einfachste associirte Formensystem bilden; das einfachste, weil es überhaupt keine einfachern zu f gehörigen Formen giebt, als die genannten. Ihre Zahl ist gerade gleich n. Ist nämlich $n = 2h + 1$, so ist die Zahl der ψ gleich h, und ebenso die der Functionaldeterminanten, also die Gesammtzahl der Formen $2h + 1 = n$; ist dagegen $n = 2h$, so giebt es zwar wieder h Formen ψ, aber eine derselben ist Invariante, und es existiren nur $h - 1$ Functionaldeterminanten, so dass mit Einschluss von f die Gesammtzahl der Formen $2h = n$ ist.

Es mag beiläufig bemerkt werden, dass bis zur 7ten Ordnung inclusive sogar ein Nenner f nicht auftritt, sondern die φ sich als ganze Functionen der genannten Bildungen ausdrücken.

Von grösserer Wichtigkeit ist die folgende Bemerkung. Wenn man die Darstellung 1. für die verschiedenen aufeinanderfolgenden Werthe von n bildet, so zeigt es sich, dass bei jedem weitern n nur ein einziger neuer Coëfficient, der letzte, zu berechnen ist. Alle übrigen Coëfficienten erhält man aus den vorangehenden Bildungen, indem man diese mit den linearen Factoren $a_x\, b_x \ldots$ multiplicirt, welche den in ihnen auftretenden Symbolen entsprechen. Hierbei geht

$$(ab)^{2k}\, a_x^{\,n-2k}\, b_x^{\,n-2k}$$

in $$(ab)^{2k}\, a_x^{\,n+1-2k}\, b_x^{\,n+1-2k}$$

über, was die entsprechende Form ψ für die nächsthöhere Ordnung ist. Aber ähnliches gilt auch für die Functionaldeterminanten, wenn man nur dieselben in zweckmässiger Weise mit einem numerischen Factor versehen definirt. Ist nämlich die Function χ_k, welche die Functionaldeterminante von ψ_k gegen f vertritt, durch den symbolischen Ausdruck definirt:

$$\chi_k = (ab)^{2k}\, (ac)\, a_x^{\,n-2k-1}\, b_x^{\,n-2k}\, c_x^{\,n-1},$$

so geht sie durch Multiplication mit $a_x\, b_x\, c_x$ in

$$(ab)^{2k}\, (ac)\, a_x^{\,n-2k}\, b_x^{\,n+1-2k}\, c_x^{\,n}$$

über, was die nämliche Bildung für das nächsthöhere n ist.

Bis zur 7ten Ordnung inclusive sind die Bildungen der φ durch die folgenden Formeln vollständig gegeben, und damit auch die typische Darstellung 1. für alle diese Fälle:

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= \tfrac{1}{2}\psi_1 \\
\varphi_3 &= \chi_1 \\
\varphi_4 &= \tfrac{1}{2}\psi_2 f^2 - \tfrac{3}{4}\psi_1^{\,2} \\
\varphi_5 &= \chi_2 f^2 - \psi_1\chi_1 \\
\varphi_6 &= \tfrac{1}{2}\psi_3 f^4 - \tfrac{15}{4}\psi_2\psi_1 f^2 + \tfrac{45}{8}\psi_1^{\,3} + 10\chi_1^{\,2} \\
\varphi_7 &= \chi_3 f^4 + (\tfrac{215}{6}\psi_2\chi_1 - \tfrac{9}{2}\psi_1\chi_2)f^2 + \tfrac{3}{4}\psi_1^{\,2}\chi_1.
\end{aligned}$$

Die Functionen φ kann man mit Hülfe von recurrenten Entwicklungen bestimmen, welche hier anzugeben zu weitläufig sein würde. Das folgende Theorem aber ist für die Gestalt dieser Ausdrücke characteristisch:

Die Functionen φ haben die Form

$$\begin{aligned}
\varphi_{2h} &= \tfrac{1}{2}\psi_h \cdot f^{2h-2} + M_h \\
\varphi_{2k+1} &= \chi_h \cdot f^{2h-2} + N_h;
\end{aligned}$$

dabei sind die M_h, N_h Ausdrücke, deren Nenner Potenzen von f sind; der Zähler von M_h ist eine ganze rationale Function der Formen

$$f,\ \psi_1,\ \psi_2 \ldots \psi_{h-1},\ \chi_1,\ \chi_2 \ldots \chi_{h-2},$$

der Zähler von φ_{2h+1} eine ganze rationale Function von

$$f,\ \psi_1,\ \psi_2 \ldots \psi_{h-1},\ \chi_1,\ \chi_2 \ldots,\ \chi_{h-1}.$$

Göttingen d. 5. August 1870.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Mai und Juni.

(Fortsetzung.)

Bulletin de la Société des Sciences Nat. de Strassbourg. Nr. 1—11. 1868. 1e année.
Nr. 1—7. 1869 2e année. Ebd. 8.

Proceedings of the American Pharmaceutical Association, at the 17 annual meeting held in Chicago, Ill.; Philadelphia. 1870. 8.

Anales del Museo publico de Buenos Aires. Entrega sexta. Buenos Aires. 1869. 4.

G. B. Christoffel, sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie. Milano. 4.

E. B. Christoffel, sopra un problema proposto da Dirichlet. Ebd. 4.

Philosophical transactions of the Royal Society of London. 1869. Vol. 159. Part. 1. 2. London. 1869. 70. 4.

The Royal Society 30th November. 1869. 4.

Proceedings of the R. Society. Vol. XVII. Nr. 109—113.— Vol. XVIII. Nr. 114—118. Ebd. 8.

The first annual report of the American Museum of Natural History. January. 1870. New-York. 8.

Abhandlungen der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. 1869. Sechste Folge. Bd. III. Prag. 1870. 4.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellsch. der Wiss. Jahrg. 1869. Hft. 1. u. 2. Ebd. 1870. 8.

Repertorium sämmtlicher Schriften der königl. böhmischen Gesellsch. d. Wiss. 1769—1868. Ebd. 1869. 8.

X. Bericht des Offenbacher Vereins für Naturkunde. Offenbach a. M. 1869. 8.

H. Wild, Jahresbericht des physikalischen Central-Observatoriums in St.-Petersburg für 1869. St. Petersburg. 1870. 4.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

Septbr. 28. № 20. 1870.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Analyse des Pyrosmaliths;

von

F. Wöhler.

Von dem Pyrosmalith, diesem seltenen Mineral, welches bis jetzt nur in einer der Eisengruben bei Nordmarken in Schweden vorgekommen ist, hat man nur eine einzige Analyse, die von Hisinger vom J. 1815 *), aus der sich keine wahrscheinliche Formel für seine Zusammensetzung ableiten lässt. Da das Mineral, ausser in derben blättrigen Massen, in Formen des hexagonalen Systems ausgezeichnet schön krystallisirt vorkommt und es durch einen für ein Silicat ungewöhnlichen Chlorgehalt merkwürdig ist, so schien es mir der Mühe werth, mit einigen Stückchen, die ich davon besass und zu denen mir G. Rose bereitwilligst noch einigen Beitrag lieferte, eine neue Untersuchung vorzunehmen.

Die angewandten Proben waren grossblättrig, vollkommen spaltbar und theils von lichtbräunlicher, theils von bräunlich grüner Farbe. Das Pulver hatte nur einen Schein in's Bräunliche. Beim Glühen in einer Röhre gab es ein durch Salz-

*) Afhandlingar i Fysik, kemi och Mineralogi, IV. 317.

säure stark saures Wasser und wurde schwarz. Das in feinen Körnchen eingewachsene Magneteisenerz wurde durch den Magnet ausgezogen, der mechanisch nicht trennbare Kalkspath aus dem gröblich zerstossenen Mineral durch verdünnte Salzsäure entfernt. Zu den Analysen wurde das sehr fein geriebene Pulver bei 100° getrocknet und stets über einen Gramm angewendet.

Vor Allem war es wichtig den Chlorgehalt genau zu bestimmen, der bei Hisinger's Verfahren offenbar zu niedrig, nämlich nur zu 3 Proc., gefunden werden musste. Ich wandte zu dieser Bestimmung zweierlei Methoden an; die eine bestand darin, dass das Mineral in mäsig starker reiner Flusssäure aufgelöst und das Chlor durch Silbersalz gefällt wurde; bei andern Bestimmungen wurde das Mineral mit dem mehrfachen Gewicht reinen kohlensauren Natrons geglüht, die Masse mit Wasser ausgezogen, die Lösung mit Salpetersäure übersättigt, wobei die darin enthaltene Kieselsäure vollkommen aufgelöst blieb, und das Chlor dann durch Silbersalz gefällt.

Bei dem letzteren Verfahren wurden zugleich Kieselsäure, Eisen und Mangan bestimmt. Ein Theil der Kieselsäure wurde aus der mit Silber angefällten Flüssigkeit durch Abdampfen zur Trockne erhalten, die übrige durch Zersetzung des nach dem Auslaugen zurückbleibenden Gemenges von Eisen- und Mangan-Silicat durch Salzsäure, welches dabei klar gelatinirte.

Da das Mineral durch concentrirte Salzsäure zersetzbar ist, jedoch ohne dabei zu gelatiniren, so wurden auch auf diese Weise zwei Analysen ausgeführt, bei denen aber die Kieselsäure, ungeachtet aller Sorgfalt, stets kleine Mengen von Eisenoxyd zurückhielt, das nachher durch Be-

handlung mit Flusssäure bestimmt werden mussten.

Eisen und Mangan wurden durch bernsteinsaures Ammoniak getrennt, nachdem durch Salpetersäure alles Eisenchlorür in Chlorid übergeführt und die Lösung basisch, tief roth, gemacht worden war. Das Mangan wurde durch ein Gemische von kohlensaurem und unterchlorigsaurem Natron gefällt. — Von Kalk waren nur Spuren zu entdecken.

Aus den Reactionen der Lösung des Minerals in Säuren ist zu erkennen, dass es den grössten Theil des Eisens als Oxydul enthält. Um zu ermitteln ob es auch Oxyd oder Chlorid enthalte, wurde das Pulver in eine verschliessbare Flasche geschüttet, in dieser alle Luft durch Kohlensäure verdrängt und luftfreie Salzsäure zufliessen gelassen. Augenblicklich färbte sich diese gelb, und aus der Lösung fällte nachher luftfreie Natronlauge nicht weisses sondern grau-grünliches Oxydulhydrat, und kohlensaurer Baryt fällte eine kleine Menge Eisenoxydhydrat.

Vier Analysen, die von Hisinger eingerechnet, gaben:

	Hisinger.				Mittel.
SiO^2	— 35,85	— 36,42	— 35,71	— 35,02	— 35,76
Fe^2O^3	— 35,48	— 35,70	— 35,18	— 35,04	— 35,35
Mn^3O^4	— 24,26	— 24,21	— 22,99	— 25,04	— 24,12
Cl	—	— 6,67	— 6,21	— 6,27	— 6,38.

Es ist am wahrscheinlichsten, das Chlor an Eisen gebunden anzunehmen, entweder als Chlorür oder als Chlorid. Nimmt man Chlorür an und den Rest des Eisens als Oxydul, so wie das Mangan als Oxydul, so lässt sich die so berechnete procentische Zusammensetzung mit keiner wahrscheinlichen Formel in Einklang

bringen; nimmt man dagegen in dem Mineral einen Theil des Eisens als Oxy-Chlorid, $Fe^2Cl^3 + Fe^2O^3$, an und das übrige als Oxydul, so gelangt man zu der mit den Analysen ganz gut stimmenden Formel:

$$(Fe^2Ce^3 + Fe^2O^3) + \left\{\begin{matrix}\dot{F}e^{10} \\ \dot{M}n^{10}\end{matrix}\right\} \dddot{S}i^{20} + 8\dot{H},$$

in 100 Th. entsprechend:

		Formel.		Analyse.
SiO^2	—	36,83	—	36,42
FeO	—	22,09	—	22,91
MnO	—	21,79	—	22,52
Fe^2O^3	—	4,91	—	5,10
Fe^2Cl^3	—	9,97	—	9,73
HO	—	4,41	—	3,32
		100		100

Es enthält demnach 14,88 Proc. Oxychlorid (= 6,53 Chlor), verbunden mit einem Doppelsilicat von Eisen- und Manganoxydul.

Am meisten weicht der Wassergehalt ab, weil er nicht direct, sondern aus der Differenz bestimmt werden musste und alle kleinen Fehler in den Mengen der andern Bestandtheile auf diesen fallen. Ein Versuch, ihn direct zu bestimmen, durch Erhitzen des Minerals mit reinem Bleioxyd, glückte in so fern, als das ausgetriebene Wasser vollkommen chlorfrei war; aber in Folge eines Versehens war seine Menge nicht zu wägen, und zur Wiederhohlung fehlte es an Material.

Für die Kieselsäure wurde nicht das Mittel aus den 4 Bestimmungen, sondern die höchste unter den gefundenen Zahlen genommen, weil ich, gerade in Bezug auf den Kieselsäuregehalt,

diese Analyse mit der grössten möglichen Genauigkeit ausgeführt zu haben glaube.

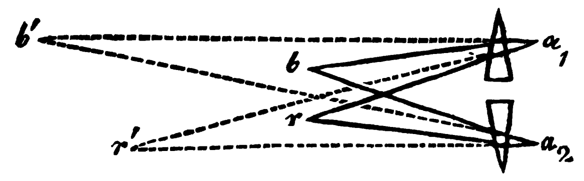
Ueber eine durch die verschiedene Brechbarkeit des Lichtes hervorgebrachte stereoskopische Wirkung;

von

F. Kohlrausch.

Ein, soviel mir bekannt ist, noch nicht beschriebener Fall künstlichen stereoskopischen Effectes wird an gefärbten Bildern durch die verschiedene Brechbarkeit des Lichtes erzeugt. Die Erscheinung und ihre höchst einfache Erklärung wird durch die folgende Figur gegeben.

Es sei r ein rother, b ein blauer Punct, in gleichem Abstande von zwei schwachen Prismen gelegen, durch welche je ein Auge a_1 und a_2 die Puncte betrachtet.



Wegen der geringeren Ablenkung der rothen Strahlen werden dieselben nach dem Durchgange durch die Prismen rückwärts verlängert sich in einem Puncte r' schneiden, welcher den Augen näher liegt als der den blauen Strahlen entsprechende Punct b'.

Im Interesse der leichteren Accomodation werden combinirte Flint- und Kronglas-Prismen, welche Dispersion ohne Ablenkung geben, vorzuziehen sein. Aber auch die Anwendung einer grossen (nicht achromatischen) Linse von etwa 1 Fuss Brennweite, durch welche beide Augen sehen, zeigt die Erscheinung sehr schön, so dass also zu dem scheinbaren stereoskopischen Effect dieser Gläser, (der dadurch entsteht, dass die durch sie betrachteten Bilder als sehr entfernte Gegenstände erscheinen) bei gefärbten Bildern eine streng stereoskopische Wirkung hinzutritt.

Der körperliche Eindruck passend gewählter Zeichnungen, unter Anderen ein roth und blau abwechselnd gefärbtes Schachbrettmuster, eine rothe Blume über grünen Kelchblättern, eine blaue Blume mit gelben Staubfäden ist überraschend. Die rothen Blätter treten zollweit vor dem grünen Hintergrunde hervor u. s. w. Wenn man abwechselnd das eine oder das andere Auge schliesst, so tritt die bekannte gegenseitige Verschiebung der Theile ein, und wenn die brechenden Kanten der Prismen nach innen gewandt werden, so springt hervor was bisher zurücktrat. Die bei künstlichen Farben unvermeidliche Dispersion an den Rändern stört auffallend wenig; sie vermehrt bei passender Anordnung sogar als ein scheinbarer Schlagschatten häufig den Effect.

Die beschriebene Erscheinung ist, wenn auch ganz verschiedenen Ursprunges, doch in so fern der vor Kurzem von Herrn Listing in diesen Nachrichten beschriebenen analog, als nur ein einziges Bild angewandt wird.

Zürich, 20. Septbr. 1870.

Universität.

Bericht über das physikalische Institut, Abtheilung für Experimentalphysik, aus den Jahren 1866 bis 1870;

von

F. Kohlrausch.

Die Räumlichkeiten des Institutes haben im Jahre 1866 durch die Ueberlassung der beiden bis dahin zur Aufbewahrung der Blumenbach'schen Schädelsammlung dienenden Zimmer einen Zuwachs erhalten. Im Zusammenhange mit dieser Erweiterung wurde im gleichen Jahre eine Assistentenstelle creirt mit der Absicht, eine ausgedehntere Benutzung des Institutes zu ermöglichen und dem physikalischen Unterricht durch Ausbildung eines dem chemischen analogen Laboratoriums eine Ergänzung zu geben, deren Bedürfniss überall anerkannt aber fast nirgends in genügender Weise befriedigt war.

Bei der Organisation eines solchen Prakticums wurde vorwiegend der Unterricht in denjenigen elementaren physikalischen Arbeiten, vorzugsweise Messungen, in's Auge gefasst, welche als Anwendungen in anderen naturwissenschaftlichen Disciplinen oder in der Praxis gegenwärtig eine so umfassende Bedeutung gewonnen haben. Den verschiedenen Studienzweigen der Prakticanten musste durch eine den individuellen Bedürfnissen angemessene Auswahl und Modification der auszuführenden Arbeiten Rechnung getragen werden. Durch eine fernere Erweiterung lassen sich dann leicht an diese Gruppe von Aufgaben die beiden noch übrigen Theile

des praktisch physikalischen Unterrichtes anschliessen, nämlich die Ausbildung von Lehrern der Physik durch Bekanntmachung mit dem Unterrichtsapparate, sowie eine Schule für wissenschaftlich physikalische Forschung.

In den seit seiner Eröffnung verflossenen sechs Semestern wurde das Laboratorium in erfreulich steigender Betheiligung von zusammen 104 Prakticanten besucht, die sich in folgender Weise auf die einzelnen Fächer vertheilen.

Mathematik und Physik	37
Chemie	24
Medicin	2
Philosophie	2
Pharmacie	36
Telegraphie	3

Eine äussere Schwierigkeit physikalischer Uebungen, z. B. den chemischen gegenüber, wird durch die Unmöglichkeit bedingt, eine grosse Anzahl von Prakticanten gleichzeitig zu beschäftigen. Denn einerseits müssen die Einzelnen sich in die beschränkte Anzahl der Instrumente theilen, andererseits ist wegen der mangelhaften mathematischen Uebung der meisten Prakticanten eine intensivere Beaufsichtigung nothwendig. Der erstere Uebelstand wird nur durch eine zu Anschaffungen und Einrichtungen bestimmte grössere Summe, deren Bewilligung in Aussicht gestellt worden ist, genügend beseitigt werden können. In der anderen Beziehung muss ich zunächst der wirksamen Assistenz der Herren Dr. Nippoldt, Dr. Fischer und Riecke dankbar gedenken. Eine wesentliche Erleichterung der Arbeit für alle Theile trat ein, als durch den Druck eines

»Leitfadens der praktischen Physik« jedem Einzelnen die Regeln und Zahlen zur Reduction der Beobachtungen in die Hand gegeben werden konnten.

Obgleich, wie bemerkt, der Schwerpunct des Laboratoriums in dem Unterricht durch elementare Uebungsaufgaben gesucht wurde, so fanden doch vorgerücktere Prakticanten Gelegenheit auch zu wissenschaftlichen Untersuchungen. Bis jetzt sind die Resultate folgender Arbeiten in den »Nachrichten« und theilweise an anderen Orten veröffentlicht worden:

Nippoldt, Bestimmung des Leitungswiderstandes der verdünnten Schwefelsäure durch alternirende Ströme;

Eggers, über den täglichen Gang der horizontalen Intensität des Erdmagnetismus zu Göttingen;

Riecke, über die Ersetzung eines Systemes von geschlossenen galvanischen Strömen durch eine Vertheilung magnetischer Massen;

Loomis, über den Einfluss der Temperatur auf die Elasticität einiger Metalle;

Ammann, Bestimmung einiger hydro- und thermoelektromotorischer Kräfte nach Weber-Siemens'schem Maasse;

Riecke, experimentelle Prüfung des Neumann'schen Gesetzes über den Magnetismus der Rotationsellipsoide;

Baker, elektrische Untersuchungen, insbesondere über die Schlagweite elektrischer Batterien.

Die wissenschaftliche Thätigkeit des Institutes stand während des verflossenen Zeitraumes vielfach mit dem magnetischen Observatorium in Verbindung, welches einen, nur durch die Entfernung unbequemen, vor den Erschütterungen

des Strassenverkehres und magnetischen Localeinflüssen geschützten grösseren Raum darbietet, an welchem es dem Institute selbst fehlt. Seitdem das Observatorium jetzt mit der Sternwarte wiederum vereinigt ist, entsteht das Bedürfniss nach einem Ersatz, der ohne Zweifel am leichtesten durch eine Erweiterung des in dem Institutsgarten gelegenen eisenfreien Pavillons geleistet werden wird.

Folgende Arbeiten wurden bis jetzt veröffentlicht:

eine Bestimmung der specifischen Wärme der Luft bei constantem Volumen;

die von der Influenzmaschine gelieferte Elektricitätsmenge nach absolutem Maasse;

über die Gültigkeit des Ohm'schen Gesetzes für Elektrolyte;

die erdmagnetischen Elemente Göttingens für 1867;

Bestimmung der horizontalen Intensität des Erdmagnetismus durch Strommessung.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Juni, Juli, August.

Nature, 35–40.

Transactions of the Zoological Society of London. Vol. VII. Part. 1. 2. London 1869. 70. 4.

Proceedings of the Scientific Meetings of the Zoological Society of London. 1869. Part. 2. 3. Ebd. 8.

Monatsbericht der Königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Mai. 1870.
Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel XXXIII. Batavia 1868. 4.
Notulen van de algemeene en bestuurs — Vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel IV. Aflev. 2. Deel V, VI, VII. Aflev. 1. Ebd. 1867—69. 8.
Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XVI. Aflev. 2—6. Deel XVII. Aflev. 1—6. Deel XVIII. Aflev. 1. Ebd. 1867—69. 8.
Katalogus der Ethnologische Afdeeling van het Museum van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Ebd. 1868. 8.
Katalogus der Numismatische Afdeeling. Ebd. 1869. 8.
Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles. 1870. Bogen 5.
N. v. Kokscharow, über den Olivin aus dem Pallas-Eisen. St. Pétersburg 1870. 4.
— — über Chondrodit-Krystalle aus Finnland. 8.
Bulletin de la Société des Sciences Naturelles de Strassbourg. Nr. 8. 9. 10. 1869. 2e année. 8.
Mémoires de l'Académie Imp. des Sciences de St. Pétersbourg. T. XIV. Nr. 8. 9. T. XV. Nr. 1—4. St. Pétersbourg 1869. 70. 4.
Bulletin de l'Académie Imp. des Sciences de St. Pétersbourg. T. XIV. Nr. 4—6. Ebd. 4.
J. Thomsen, Thermochemiske Undersøgelser.
H. Krabbe, Bidrag til Kundskab om Fuglenes Baendelorme. Kjöbenhavn 1869. 4.
R. J. F. Henrichsen, om den palatinske Anthologies Oprindelse, Alder og Forchold til Maximes Blanesdes's Anthologie. Ebd. 1869. 4.
D. F. Eschricht, Ni Tarler til Oplysning af Hialdyrenes Bygning. Ebd. 1869. 4.
Oversigt over det Kong. danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbeider i Aaret 1869. Ebd. 1869. 8.
Verhandlungen der Russisch-Kaiserlichen Mineralogischen Gesellschaft zu St. Petersburg. Zweite Serie. Bd. V. St. Petersburg 1870. 8.
Bulletin de la Société Imp. des Naturalistes de Moscou. Année 1869. Nr. 4. Moscou 1870. 8.

R. Clausius, über einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz. 8.

Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft. Bd. 24. Hft. 1 und 2. Leipzig 1870. 8.

Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes herausg. von der deutschen morgenländischen Gesellschaft. Bd. 5. Nr. 3. Ebd. 1870. 8.

General-Bericht über die Europäische Gradmessung für das Jahr 1869. Berlin 1870. 4.

Vargasia. Numero 7. Caracas 1870. 8.

Scriptores Rerum Lusaticarum. Bd. IV. Görlitz 1870. 8.

Jahresbericht des physicalischen Vereins zu Frankfurt a. M. 1868—69. Frankfurt a. M. 1870. 8.

Mittheilungen der Antiquarischen Gesellschaft in Zürich. Bd. XVI. Abth. 2. Hft. 4. Zürich 1870. 4.

Abhandlungen der philos.-philolog. Classe der königl. bayer. Academie der Wissenschaften. Bd. XII. Abth. 1. München 1869. 4.

W. Preger, die Entfaltung der Idee des Menschen durch die Weltgeschichte. Ebd. 1870. 4.

B. Jordan, traité des substitutions et des équations algébriques. Paris 1870. 4.

Livraisons 31—35 de la Carte Géologique de la Suède, accompagneés de renseignements.

Carte générale des formations de la partie orientale du comté de Dal.

Verhandlungen des naturhist. medicin. Vereins zu Heidelberg. Bd. V. 8.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

19. October. № 21. 1870.

Universität.

Die Nerven-Endigung in der Zunge des Menschen.

von

W. Krause.

In jeder Papilla fungiformis der Ratte sitzt im Centrum ihrer freien Endfläche bekanntlich eine Epithelknospe, zu welcher analog wie beim Frosch ein aus dunkelrandigen Fasern bestehendes Nervenstämmchen tritt. Dieselbe gehen in blasse von kernhaltigem Neurilem bekleidete Fasern über und indem sie pinselförmig auseinander weichen, entsteht ein scheinbar kernhaltiges Stratum, in welchem die blassen Nervenfasern nur bis zu abgerundeten scheinbar freien Enden dicht unter den eigenthümlichen Epithelzellen der Knospe zu verfolgen sind; wahrscheinlich stehen sie jedoch mit gewissen der letzteren Zellen in Zusammenhange.

Wo immer der N. glossopharyngeus des Menschen in Schleimhäuten endigt, sind dieselben Verhältnisse nachweisbar. Unumgänglich erforderlich ist die Untersuchung der Zungen unmittelbar nach dem Tode, wozu sich in Göttingen reichliche Gelegenheit bot. Uebrigens scheinen analoge Anordnungen auch mehreren Säugethieren zuzukommen; wenigstens stimmt das Schwein

fast vollständig (bis auf die geringere Anzahl der Papillae vallatae) mit dem Menschen überein.

Mit Epithelknospen (becherförmigen Organen Leydig's) ist am zahlreichsten die hintere Fläche der Epiglottis ausgestattet, während die vordere gewöhnliche Papillen trägt. Abgesehen von den bis unter die Knospen zu verfolgenden Nervenfasern, kommen hier bekanntlich Endigungen einfach sensibler Nerven mit Endkolben vor. Die betreffende Epiglottisfläche dürfte das Organ für die intensiven sog. Nachgeschmäcke sein. Ausserdem sind hier Ausführungsmündungen acinöser Drüsen vorhanden, die man mit Epithelknospen verwechselt hat, von denen sie sich schon durch beträchlichere Grösse der ersteren unterscheiden.

Die vordere Fläche des Gaumensegels besitzt keine Epithelknospen, dagegen sind dieselben sehr zahlreich vorhanden in den von Albin (1754) entdeckten und von F. D. C. Mayer (1842) als Papilla foliata bezeichneten Schleimhautfalten des hinteren Zungenrandes.

Hier findet sich nämlich beim Menschen constant ein Gebilde, welches dicht vor dem unteren Anfang des Arcus glossopalatimus am Seitenrand der Zunge gelegen ist. Von hinten nach vorn ca. 7 Mm. von unten nach oben 5 Mm. messend zeigt sich das Organ aus 5 verticalen Längsspalten bestehend, deren Eingang lateralwärts gerichtet ist. Die Spalten sind 2—3 Mm. tief, in ihrem Grunde münden viele Ausführungsgänge kleiner Schleimdrüsen, am Rande der Spalten steht hier und da eine Papilla fungiformis. Dicke Stämmchen des N. glossopharyngeus treten unter die in der Tiefe der Spalten dichtgedrängt stehenden Epithelknospen und endigen in der von den Papillae

fungiformes Eingangs beschriebenen Weise, während einzelne einfach sensible Nervenfasern mit Endkolben aufhören.

Die Epithelknospen an der Seitenoberfläche der Papillae vallatae, sowie an der Innenfläche ihres Aussenwalles sind bekannt. Ausserdem kommen einige Epithelknospen auf jeder derjenigen flacheren Papillae fungiformes vor, welche am Seitenrande die Spitze der Zunge dichter gedrängt stehen. Man kann sie als Papillae lenticulares unterscheiden. Sie enthalten wie auch die Papillae vallatae einzelne etwas dickere Nervenfasern, die sich von dem Hauptstämmchen in der Axe absondern; diese einzelnen Nervenfasern endigen mit rundlichen Endkolben, die bekanntlich unter der Basis der secundären Papillen liegen.

Anders verhält es sich mit den rückwärts gerichteten längeren Papillae fungiformes des Zungenrückens. Man kann sie als Papillae conicae absondern, so dass die Fungiformes jetzt in zwei Unterarten: Lenticulares und Conicae zerfallen. Die letzteren haben keine Epithelknospen, einen dickeren Epithel-Ueberzug, alle ihre Nervenfasern hören mit Endkolben auf. Da die Filiformes mit Nervenfasern nur an ihrer Basis versehen sind, die daselbst ebenfalls mit Endkolben aufhören, so kann man als eigentliche Geschmackspapillen die Lenticulares und Vallatae bezeichnen, die Filiformes und Conicae als Tastpapillen, während alle secundären Papillen Gefässe enthalten.

Die Epiglottis-Hinterfläche, die Papilla foliata, die Papillae vallatae erhalten ihre Nerven direct von N. glossopharyngeus. Die Seitenränder der Zunge bekommen auch dergleichen Aestchen, aber für die Spitze bleibt nur die Annahme

übrig, dass die Fasern des N. glossopharyngeus auf der Bahn des N. tympanicus durch den N. petrosus superficialis minor zum N. facialis und von diesem als Chorda tympani zur Zunge gelangen. Die experimentellen Thatsachen scheinen hiermit nicht im Widerspruch zu stehen und auch die auf den anatomischen Befund gegründete Vermuthung zu bestätigen, wonach zwar die Papillae fungiformes der Seitenränder und des Randes der Zungenspitze, nicht aber diejenigen des eigentlichen Zungenrückens oder die Papillae filiformes wahre Geschmacks-Empfindungen vermitteln.

Was nun den Bau der Epithelknospen anlangt, so ist die Verschiedenheit ihrer äusseren und inneren Zellen durch keine Uebergänge vermittelt. Aber auch die inneren Zellen bieten drei bestimmt getrennte Formen dar, nämlich Spindelzellen, Stäbchenzellen und Gabelzellen. Letztere gleichen den Stäbchenzellen bis auf ihr freies dichotomisch getheiltes; Ende ähnliche Zellen mit viel längeren Zinken sind bisher nur vom Frosch bekannt gewesen.

Göttingen, den 15. August 1870.

Die partiellen Differentialgleichungen, denen die Resultante R einer Form n^t Grades und einer Form m^t Grades genügt.

Von

P. Gordan.

Vorgelegt von A. Clebsch.

Es seien f_1 und f_2 zwei homogene Formen vom n^t Grade in den Variabeln x_1 und x_2 und $n \geqq m$,

$$f_1 = a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} x_2 \ldots\ldots a_0 x_2^n$$

$$f_2 = \alpha_m x_1^m + \alpha_{m-1} x_1^{m-1} x_2 \ldots\ldots \alpha_0 x_2^m,$$

R sei ihre Resultante. Haben dann f_1 und f_2 einen gemeinsamen Faktor, so haben auch die Formen

$$f_1 + \lambda (xy)^{n-m} f_2 \text{ und } f_2$$

$$(xy) = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

für beliebige Werthe der y diesen Faktor gemein; hieraus folgt, dass R auch die Resultante der Formen $f_1 + \lambda (xy)^{n-m} f_2$ und f_2 ist, und dass man, wenn man R nach den Coefficienten von f_1 differentiirt und die Incremente durch die entsprechenden Coefficienten der Form $(xy)^{n-m} f_2$ ersetzt, zu einer verschwindenden Covariante in den Variabeln y gelangt. Diese Covariante ist die m^t Uebereinanderschiebung (vgl. Math. Annalen Bd. 2. S. 236) von f_2 mit der Evectante von R (vgl. Salmon Algebra linearer Substitutionen 9. Vorlesung), nämlich der Covariante:

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{n.n-1 \ldots n-k+1}{1.2 \ldots k} \frac{dR}{da_k} x_1^k x_2^{n-k}$$

$$= \Sigma_k (-1)^k \binom{n}{k} \frac{dR}{da_k} x_1^k x_2^{n-k},$$

so dass man die Gleichung hat:

I. $$(Ev\,R,\ f_2)^m = 0.$$

Dieselbe stellt $n-m+1$ partielle Differentialgleichungen für die Resultante dar, da die Coefficienten des Ausdruckes linker Hand für sich verschwinden. Dieses Resultat kann noch auf folgendem andern Wege erzielt werden.

Haben f_1 und f_2 einen gemeinsamen Faktor

$$\xi_1 x_2 - \xi_2 x_1 = (\xi x),$$

so verschwindet ihre Resultante R und ihre Evectante wird (vgl. Salmon Algebra d. linearen Subst. 9. Vorlesung) der Form $(\xi x)^n$ proportional. Hieraus folgt, dass die Uebereinanderschiebung:

$$(Ev\,R,\ f_2)^m$$

der Form $(\xi x)^{n-m} f_2(\xi)$ proportional wird und somit verschwindet.

Das Verschwinden der Resultante R bewirkt also das Verschwinden der Uebereinanderschiebung $(Ev\,R,\ f_2)^m$, mithin hat diese letztere R

zum Faktor und, da sie in den Coefficienten von f_1 von niederem Grade als R ist, den Werth 0.

Mittelst dieser Betrachtungen ist man im Stande noch eine Reihe anderer partieller Differentialgleichungen aufzustellen, denen die Resultante R genügt. Ist nämlich ϱ irgend eine simultane Covariante von f_1 und f_2, deren Grad μ nicht grösser als n ist und welche die gemeinsamen Faktoren von f_1 und f_2 ebenfalls besitzt, dann ist die Uebereinschiebung:

$$(E v R, \varrho)^{\mu}$$

eine durch R theilbare Covariante. Aus dieser Eigenschaft ergeben sich $n - \mu + 1$ partielle Differentialgleichungen, denen die Resultante R genügt.

Unter den Covariantan ϱ, welche gleichzeitig mit f_1 und f_2 verschwinden, verdient die folgende eine besondere Berücksichtigung:

II. $$\frac{f_1 \cdot f_{2, y^{m-1}} - f_{1, y^{m-1}} \cdot f_2}{(xy)} =$$

$$\frac{1}{2}\Sigma_k \frac{\binom{n}{k}\binom{m-1}{k} - (-1)^k \binom{m}{k}\binom{m-1}{k}}{\binom{m+n-k+1}{k}} (f_1, f_2)^k_{y^{m-k-2}} (xy)^k .$$

Diese Identität ist von grosser Wichtigkeit für die Theorie der Invarianten, sie ist gleichzeitig von Herrn Clebsch und mir gefunden worden. Ihr Beweis wird demnächst in Herrn Clebsch's Theorie der Invarianten linearer For-

men und in einem Aufsatze über Resultanten in den »Mathematischen Annalen« erscheinen.

In derselben bedeutet der Ausdruck F_{y^k} diejenige Covariante, welche aus der Form F (in den Variabeln x_1 und x_2) dadurch entsteht, dass man dieselbe k Mal hintereinander nach den x differentiirt und die Incremente durch die y ersetzt.

Nach dem Obigen ist die Uebereinanderschiebung:

$$\Sigma_k \binom{m-1}{k} \frac{\binom{n}{k} - (-1)^k \binom{m}{k}}{\binom{m+n-k+1}{k}} ((f_1, f_2)^k, \; Ev\, R)^{n-k+1}$$

durch R theilbar. Setzt man sie gleich dem Produkte $R \,.\, \psi$, dann ist der zweite Faktor ψ eine Covariante vom 1. Grade in den Coefficienten von f_2 und vom $(m-2)$. Grade in den Variabeln. Da keine solche Covariante existirt so ist $\psi = 0$ und man hat für die Resultante R die partielle Differentialgleichung:

IIIa.

$$\Sigma_k \binom{n-1}{k} \frac{\binom{n}{k} - (-1)^k \binom{m}{k}}{\binom{m+n-k+1}{k}} ((f_1, f_2)^k, Ev R)^{n-k+1} = 0$$

welche ich kurz durch:

IIIb. $\Theta(R) = 0$

bezeichnen will.

Haben die Formen f_1 und f_2 denselben Grad, ist also $m = n$, dann nehmen die Formeln I. und III. folgende Gestalt an:

$$(Ev\,R,\ f_2)^n = 0$$

$$\text{IIIc.}\quad \Sigma_k \frac{\binom{n}{2k+1}\binom{n-1}{2k+1}}{\binom{2n-2k}{k+1}} (Ev\,R,\ (f_1 f_2)^{2k+1})^{n-2k}$$

$$= \Theta(R) = 0.$$

Ist das System der simultanen Invarianten der Formen f_1 und f_2:

$$A_1,\ A_2,\ A_3 \ldots\ldots\ldots$$

gebildet, und sind die zwischen den A bestehenden Relationen aufgestellt, dann geben die partiellen Differentialgleichungen I. und III. Mittel an die Hand, um die Resultante R als ganze Funktion der A auszudrücken. Bildet man nämlich alle diejenigen Produkte und Potenzen der A, welche in den Coefficienten der Formen f_1 und f_2 von den Graden m und n sind, und addirt dieselben, nachdem man sie mit numerischen Coefficienten c multiplicirt hat, dann erhält man eine Funktion $F(A)$, welche bei gehöriger Bestimmung der c in R übergeht (vgl. Math. Annalen Bd. 2. S. 227). Diese letztere lässt sich nun im Allgemeinen dadurch ausführen, dass man $F(A)$ statt R in die partiellen Differentialgleichungen einträgt. Es entstehen dann die Identitäten:

$$\text{IV.}\qquad \begin{cases} \Sigma_i \dfrac{dR}{dA_i} \cdot (Ev\, A_i,\, f_2)^m = 0 \\[2ex] \Sigma_i \dfrac{dR}{dA_i}\, \Theta(A_i) = 0. \end{cases}$$

Von besonderem Interesse werden diese Formeln in ihrer Anwendung auf die Discriminanten. Es sei R die Discriminante einer Form:

$$f = a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} x_2 \; .\; .\; .\; .\; a_0 x_2^n,$$

also die Resultante ihrer partiellen Differentialquotienten nach x_1 und x_2. Hat f einen Faktor $(x\xi)$ doppelt, dann verschwindet für denselben die Polare f_y, die Discriminante R und nach der Formel I. die Uebereinanderschiebung:

$$(Ev\, R,\; f_y)^{n-1}.$$

Da das Verschwinden von R das Verschwinden derselben bewirkt, so ist diese Covariante durch R theilbar. Setzt man sie gleich $R \,.\, \psi$ dann ist ψ eine Covariante vom 0. Grade in den Coefficienten und vom 1. Grāde in den Variabeln x und y. Die einzige Covariante von dieser Beschaffenheit ist $c \,.\, (xy)$ (wo c numerisch ist); man hat daher $\psi = c \,.\, (xy)$ und:

$$(Ev\, R,\; f_y)^{n-1} = c\, R\, (xy).$$

Setzt man in dieser Identität die einzelnen Coefficienten einander gleich, dann erhält man diejenigen partiellen Differentialgleichungen, welche aussagen, dass die Discriminante eine Invariante ist, denn man hat für jede Invariante I von f die Identität:

$$(Ev\,I,\ f_y)^{n-1} = c\,I\,(xy).$$

Aus der Formel III. aber ergiebt sich für die Discriminante R die Formel:

$$\Theta(R) = \Sigma_k \frac{\binom{n-1}{2k+1}\binom{n-2}{2k+1}}{\binom{2n-2k-2}{2k+1}} (Ev R, (f,f)^{2k+2})^{n-2k} = 0,$$

mittelst deren man die Discriminante als ganze Funktion der Fundamental-Invarianten darstellen kann.

Diese Formeln sind nicht die einzigen, mit welchen man diesen Zweck erreicht; Herr Brioschi hat (Annali di matematica pura ed applicata Ser. I. tomo II. pag. 82) andere partielle Differentialgleichungen aufgestellt, mittelst deren er die Discriminanten der Formen 4., 5. und 6. Grades (ib. Ser. II. tomo I. pag. 159) als ganze Funktion der Fundamental-Invarianten darstellte.

Giessen, im Sept. 1870.

Universität.

Promotionen der philos. Fakultät.

Unter dem Decanate des Prof. Alfred Clebsch, vom 1. Juli bis 31. December 1869, sind folgende Doctorpromotionen beschlossen und mit Ausnahme der sieben letzten vollzogen worden:

1) 28. Juli. Richard Lehmann aus Neucelle, nach öffentlicher Disputation. Dissertation: Forschungen zur Geschichte Abt Hugo I von Cluny.

2) 2. Aug. Otto Wallach aus Königsberg in Preussen. Dissert.: Ueber die vom Toluol abgeleiteten neuen isomeren Verbindungen.

3) 2. Aug. Andreas Ross Garrick aus Stranraer in Schottland. Dissert.: On the sulpho-acid of Benzol.

4) 6. Aug. Paul Biber aus Hamburg. Dissert.: Untersuchungen über die mit dem Benzol homologen Kohlenwasserstoffe und über eine neue mit der Zimmtsäure homologe Säure.

5) 6. August. Francis E. Loomis aus Massachusetts. Dissert.: Periodic stars.

6) 8. August. Christian Renner aus Röllshausen in Hessen. Dissert.: Commentationum Lysiacarum capita duo.

7) 11. Aug. Paul Schweitzer Tieftrunk aus Berlin. Dissert.: Ueber die dreibasische Phosphorsäure.

8) 11. Aug. Henry Edward Storrs aus Amherst, Massachusetts. Dissert.: On the presence of Methyltoluol in commercial Xylol and Investigations on some of the derivatives of isophtalic acid.

9) 14. Aug. Robert Hassenkamp aus

Fulda, nach öffentlicher Disputation. Dissert.: De cohortibus Romanorum auxiliaribus.

10) 17. Aug. Franz Strauch aus Oesterr. Schlesien. Dissert.: De personis Juvenalianis.

11) 18. Aug. Carl Arnold Heintz aus Berlin. Dissert.: Ueber einige Derivate der Oxybenzoësäure und über die Einwirkung von Chlorbenzoyl auf salzsaures Hydroxylamin.

12) 21. Aug. Wilhelm Raydt aus Lingen. Dissert.: Die Ausdehnung fester und flüssiger Körper durch die Wärme und eine neue Methode zur Bestimmung derselben.

13) 26. Aug. Adolf Seebeck aus Berlin. Dissert.: Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Röhren.

14) 26. Aug. Hugo Tobisch aus Breslau. Dissert.: Beiträge zur Frage über die Bodenabsorption.

15) 26. Aug. Theodor Rohde aus Tiegenhof. Dissert.: König Leon II von Kleinarmenien.

16) 26. Octbr. Johann Kiesow aus Vorbein in Pommern. Dissert.: Ueber einige vom Aethyl-Benzol sich ableitende Verbindungen.

17) 30. October. Rudolf Zöppritz aus Darmstadt. Schrift: Aus F. H. Jacobis Nachlass.

18) 3. Nobr. Georg Moritz Calberla aus Dresden. Dissert.: Die Uebergabe des Inventars bei der Verpachtung von Landgütern.

19) 12. Novbr. Adolf Hemme aus Hannover. Dissert.: Ueber die Anwendung des Artikels in der französichen Sprache.

20) Carl Brabänder aus Lüdenscheid. Dissert.: Quaestiones Xenophonteae.

21) Paul Schöne aus Berlin. Dissert.: Ansichten über das deutsche Reich und seine

Verfassung in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts.

22) Walter Bormann aus Weimar. Diss.: Quaestionum Aeschylearum specimen.

23) Ben K. Emerson aus Amerika. Diss.: Die Liasmulde von Markoldendorf.

24) Friedlieb Rausch in Frankfurt a. M. Dissert.: Geschichte und Literatur des Rhäto-Romanischen Volks.

25) Hermann Mehmel aus Mühlhausen. Dissert.: De Ottone Duce Bajuvariorum.

26) Rev. Charles Teape in Edinburg. Dissert.: Berkeleian Philosophy.

Ausserdem sind folgende unter dem Decanat des Professors von Waltershausen beschlossene Promotionen vollzogen worden:

1) 21. Juli. Albert Stimming aus Prenzlau.

2) 21. Juli. Christian Rauch aus Kiel.

3) 21. Juli. Franz Hüffer aus Münster.

4) 2. Aug. L. B. Förster aus Delitsch.

5) 12. Aug. Hermann Meinberg aus Berlin.

6) 18. Octbr. Dietrich Johann Witte aus Lübeck.

7) 26. Decbr. Anton Schell in Riga.

Die Facultät hat sich genöthigt gesehen, 11 Gesuche zurückzuweisen.

Unter dem Decanate des Prof. Wilhelm Müller, vom 1. Januar bis zum 30. Junius 1870, sind von der philosophischen Fakultät folgende Doctorpromotionen beschlossen und mit Ausnahme der zehn letzten vollzogen worden.

1) 15. Febr. Wilhelm Bernhardi aus Berlin, Dissertation: Ueber Maotet di Giovenazzo. — In absentia.

2) 10. Febr. Carl Theophil Nauhaus

aus Berlin. Dissertation: Die Verkümmerung der Hochblätter.

3) 12. März. David Ernst Melliss aus New-York. Dissertation: Contributions to the Chemistry of Zirconium. — In absentia.

4) 15. März. Hermann Grotefend aus Hannover. Dissertation: Ueber den Werth der Gesta Friderici imperatoris des Bischofs Otto von Freising für die Geschichte des Reichs unter Friedrich dem Ersten.

5) 25. März. Ira Remsen aus New-York. Dissertation: Investigations upon piperic acid and derivatives.

6) 31. März. Julius Upmann aus Birkenfeld. Dissertation: Thihydrobenzoësäure und Dithiobenzoësäure.

7) 5. April. Bernhard Genz aus Gollnow in Pommern. Dissertation: Beiträge zur Kenntniss der Xylidinderivate.

8) 7. April. Wilhelm Windelband aus Potsdam. Dissertation: Die Lehren vom Zufall.

9) 7. April. Johann Arthur Aue aus Mähren. Dissertation: De Q. Horatii Flacci ingenio poetico moribusque ingenuis. — In absentia.

10) 23. Mai. Oscar Grund aus Hamburg. Dissertation: Die Wahl Rudolfs von Rheinfelden zum Gegenkönig.

11) 28. Mai. Ernst Ehrenfeuchter aus Göttingen, nach öffentlicher Disputation. Dissertation: Ueber die Annales Altahenses majores.

12) 15. Juni. Hans Marquardt aus Danzig. Dissertation: Quaestiones Galenianae.

13) 15. Juni. Ferdinand Tiemann aus Rübeland (Braunschweig). Dissertation: Noch ein Beitrag zur Kenntniss von Abkömmlingen des Toluols und des Guanidins.

14) 16. Juni. Carl Grote aus Braunschweig. Auf Grund von Druckschriften. — In absentia.

15) Rudolph von Willemoes-Suhm aus Rendsburg. Dissertation: Ueber Trematoden und Nemathelminthen.

16) Adolph Giesecke aus Gittelde (Braunschweig). Dissertation: Zur Kenntniss des Rautenöls.

17) Hermann Nölle aus Osnabrück. Dissertation: Die Sprache des Gedichts von der Eule und Nachtigall.

18) Georg Heinrich Funcke aus Hannover. Dissertation: Zur Theorie des Rollens.

19) Thomas Allen Blyth aus England. Auf Grund mehrerer Druckschriften. — In absentia.

20) Hermann Maué aus Frankfurt a. M. Dissertation: De praepositionis *ad* usu Taciteo.

21) Julius Post aus Göttingen. Dissertation: Ueber drei isomere Bromsulfosäuren aus krystallisirtem Bromtoluol.

22) Oscar Siegel aus Clausthal. Dissertation: Beiträge zur Kenntniss einiger essbarer Pilze.

23) Hugo Kühlewein aus Sondershausen. Dissertation: Observationes de usu particularum quarundam in libris qui vulgo Hippocratis nomine circumferuntur.

24) William Woolls aus England, auf Grund einer Dissertation: Species plantarum Paramattensium secundum ordines naturales dispositae und der gedruckten Werke: 1) A contribution to the flora of Australia. 2) The progress of botanical discovery in Australia.

Ferner wurde aus dem Decanate des Hofraths Bertheau folgende Promotion vollzogen:

29. März. Ferdinand Kampf aus Allenburg.

16 Gesuche hat die Facultät zurückgewiesen.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

12. November. № 22. 1870.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Beiträge zu der Theorie der Umkehrung eines Functionensystems.

von

R. Lipschitz.

Wenn für ein bestimmtes Gebiet G der reellen Variabelen $s_1, s_2, \ldots s_n$ ein System von eindeutigen und reellen Functionen $F_1, F_2, \ldots F_n$ gegeben ist, deren erste, partiell nach diesen Variabelen genommene Differentialquotienten überall endlich und stetig sind, so kann die Frage nach solchen Bedingungen erhoben werden, unter denen auch umgekehrt jedem System von Werthen der Functionen $F_1, F_2, \ldots F_n$ nicht mehr als ein System von Grössen $s_1, s_2, \ldots s_n$ entspricht. Die Gedanken, durch welche Jacobi die Theorie der Systeme von Functionen mehrerer Variabelen auf die algebraische Theorie der Determinanten gegründet hat, führen zu der ersten Bedingung, dass die Functionaldeterminante des Functionensystems $F_1, F_2, \ldots F_n$ in Bezug auf das System der Variabelen $s_1, s_2, \ldots s_n$ in dem ganzen Gebiete G eine Grösse von unveränderlichem Vorzeichen sei. Um zu dieser Bedingung andere Bedingungen hinzuzufügen,

aus denen die aufgestellte Beziehung mit Nothwendigkeit folgt, war es erforderlich, durch geeignete Mittelglieder den von Riemann ausgebildeten Begriff des einfachen Zusammenhanges einer Mannigfaltigkeit in's Spiel zu bringen. Gegenwärtig werde ich zuerst ein System von Bedingungen entwickeln, welches das verlangte leistet, und darauf ein theoretisches Verfahren angeben, durch welches die Grössen z_1 $z_2 \ldots z_n$, die einem gegebenen System von Werthen der Functionen F_1, F_2, ... F_n eindeutig zugehören, dargestellt werden können. Damit die berührten Aufgaben auch unter der Voraussetzung gelöst werden, dass ein System von Functionen f_1, f_2, ... f_m der complexen Variabelen y_1, y_2, ... y_m vorliegt, ist es angemessen, nach dem Vorgange von Herrn Kronecker *) die getrennten Bestandtheile der complexen Variabelen y_1, y_2, ... y_m als die reellen Variabelen z_1, z_2, ... z_{2m}, und gleichzeitig die getrennten Bestandtheile der complexen Functionen f_1, f_2, ... f_m als die reellen Functionen F_1, F_2, ... F_{2m} jener reellen $2m$ Variabelen aufzufassen; dann führt der eingeschlagene Weg ebenfalls zum Ziele.

1.

Das Gebiet G der reellen Variabelen $z_1, z_2, \ldots z_n$ sei durch die Forderung characterisirt, dass innerhalb desselben gewisse eindeutige Functionen

*) Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabelen. Monatsbericht der Berliner Academie v. März 1869, pag. 177.

dieser Variabelen bestimmte feste Werthe nicht erreichen oder beziehungsweise nicht überschreiten dürfen, und dieser Forderung mögen nur endliche Werthe der einzelnen Variabelen $z_1, z_2, \ldots z_n$ genügen; in der Begrenzung K des Gebietes G sind jene Functionen den betreffenden Werthen gleich. Legt man einer Function $F_{\mathfrak{a}}$ aus der Reihe der gegebenen Functionen $F_1, F_2, \ldots F_n$ einen zulässigen Werth $C_{\mathfrak{a}}$ bei, so sollen die Ungleichheiten $F_{\mathfrak{a}} - C_{\mathfrak{a}} > 0$ und $F_{\mathfrak{a}} - C_{\mathfrak{a}} < 0$ zwei Stücke bezeichnen, in welche das Gebiet G durch die Gleichung $F_{\mathfrak{a}} - C_{\mathfrak{a}} = 0$ zerfällt. In dem System von Gleichungen

$$(1)\quad F_1 = C_1,\ F_2 = C_2,\ \ldots F_n = C_n$$

sind den sämmtlichen Functionen $F_{\mathfrak{a}}$ feste Werthe $C_{\mathfrak{a}}$ vorgeschrieben. Wenn man aus diesem System successive alle verschiedenen Paare von Gleichungen $F_{\mathfrak{k}} = C_{\mathfrak{k}}$ und $F_{\mathfrak{l}} = C_{\mathfrak{l}}$ fortlässt, so bestimmen die übrigbleibenden $n-2$ Gleichungen für die Variabelen $z_1, z_2, \ldots z_n$ beziehungsweise eine Mannigfaltigkeit der zweiten Ordnung $M_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}$. Die Begrenzung der Mannigfaltigkeit $M_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}$ sei eine in sich zurücklaufende Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, welche der Begrenzung K des Gebietes G angehört. Nun heisst eine Mannigfaltigkeit der zweiten Ordnung einfach zusammenhängend, wofern dieselbe durch jede von einem Werthsystem ihrer Be-

grenzung bis zu einem zweiten Werthsystem derselben sich einfach erstreckende Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung in zwei Stücke zerfällt *), und ich setze voraus, dass die Mannigfaltigkeit $M_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}$ einfach zusammenhängend ist. Ich setze ferner voraus, dass in derselben sowohl die Gleichung $F_{\mathfrak{t}} = C_{\mathfrak{t}}$, wie auch die Gleichung $F_{\mathfrak{l}} = C_{\mathfrak{l}}$, jede für sich, eine Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung bezeichnet, die sich von einem Werthsystem der begrenzenden Mannigfaltigkeit bis zu einem zweiten Werthsystem derselben einfach erstreckt, und dass diese beiden Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung entweder eine endliche Zahl von endlich differirenden gemeinsamen Werthsystemen haben, oder in endlichen Theilen zusammenfallen, dass sie jedoch nicht unendlich viele discrete gemeinsame Werthsysteme besitzen. Ausserdem nehme ich an, dass die Mannigfaltigkeit $M_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}$ keinerlei Singularitäten enthalte, welcher Ausdruck späterhin genau definirt werden wird. Wenn dann für jedes Werthsystem des ganzen Gebietes G die Functionaldeterminante

$$\Sigma \pm \frac{dF_1}{dz_1} \frac{dF_2}{dz_2} \cdots \frac{dF_n}{dz_n} = \Delta$$

eine Grösse von unveränderlichem Vorzeichen

*) Riemann, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse, pag. 6. Statt der Ausdrücke: Linie und Fläche sind in dem Texte die Ausdrücke: Mannigfaltigkeit der ersten und der zweiten Ordnung eingeführt.

ist, mithin auch nirgend verschwindet, so lässt sich zeigen, dass dem gegebenen System von Gleichungen (1) nicht mehr als ein System von Werthen $z_1, z_2, \ldots z_n$ genügen kann.

Ein Beweis dieser Behauptung lässt sich aus der Betrachtung einer analytischen Form ableiten, auf die schon bei einer anderen Veranlassung hingewiesen ist *). Zu der ganzen homogenen Function des ersten Grades von den n Differentialen $dz_{\mathfrak{a}}$

$$(2) \qquad a_1 dz_1 + a_2 dz_2 + \ldots + a_n dz_n,$$

in der die Coëfficienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ für das Gebiet G gegebene reelle, eindeutige und differentiirbare Functionen der Variabelen $z_1, z_2, \ldots z_n$ sind, gehört die in Bezug auf die beiden Systeme von Differentialen $dz_{\mathfrak{a}}$ und $\delta z_{\mathfrak{b}}$ bilineare Form

$$(3) \qquad \Sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \left(\frac{da_{\mathfrak{a}}}{dz_{\mathfrak{b}}} - \frac{da_{\mathfrak{b}}}{dz_{\mathfrak{a}}}\right) (dz_{\mathfrak{a}} \delta z_{\mathfrak{b}} - \delta z_{\mathfrak{a}} dz_{\mathfrak{b}}),$$

welche bei einer Substitution beliebiger neuer Variabelen statt der Variabelen $z_{\mathfrak{a}}$ zu der homogenen Function (2) covariant bleibt; für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sind alle Paare verschiedener Zahlen aus der Reihe von 1 bis n zu substituiren. Eine bestimmte Anwendung dieser Form (3) dient dem gegenwärtigen Zwecke, und liefert zugleich ei-

*) Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen. Journal f. Mathematik, Bd. LXX, pag. 72. Monatsbericht der Berliner Academie v. Januar 1869, pag. 50.

nen Beweis des Satzes, dass der Ausdruck (2) ein exactes Differential wird, sobald die Form (3) identisch verschwindet.

Es reicht hin, von den gleichberechtigten $\frac{n(n-1)}{2}$ Mannigfaltigkeiten $M_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}$ eine einzige zu erörtern, und dies sei die Mannigfaltigkeit $M_{n-1,n}$. Wenn man allgemein

(4) $$dF_{\mathfrak{a}} = F_{\mathfrak{a},1}dz_1 + F_{\mathfrak{a},2}dz_2 + \dots + F_{\mathfrak{a},n}dz_n$$

setzt, so entsprechen der Mannigfaltigkeit $M_{n-1,n}$ die $n-2$ Gleichungen

(5) $$\begin{cases} F_{1,1}\,dz_1 + F_{1,2}\,dz_2 + \dots + F_{1,n}\,dz_n = 0 \\ F_{2,1}\,dz_1 + F_{2,2}\,dz_2 + \dots + F_{2,n}\,dz_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_{n-2,1}dz_1 + F_{n-2,2}dz_2 + \dots + F_{n-2,n}dz_n = 0. \end{cases}$$

Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ beliebige Zahlen aus der Reihe von 1 bis n, und wird die Bezeichnung

(6) $$\frac{d^2\varDelta}{dF_{n-1,\mathfrak{a}}\,dF_{n,\mathfrak{b}}} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

angewendet, so ist bekanntlich $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + (\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = 0$, und es folgt aus (5) diese Gleichung zwischen je drei verschiedenen Differentialen $dz_{\mathfrak{a}}$, $dz_{\mathfrak{b}}$, $dz_{\mathfrak{c}}$,

(7) $$(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})\,dz_{\mathfrak{a}} + (\mathfrak{c}, \mathfrak{a})\,dz_{\mathfrak{b}} + (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\,dz_{\mathfrak{c}} = 0.$$

Ueber die Bedingungen, unter denen eine der Grössen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ innerhalb der Mannigfaltigkeit $M_{n-1,n}$ verschwinden darf, ist weiterhin ausführlich zu sprechen. An dieser Stelle wird nur festgesetzt, dass ein Nullwerden von $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ in keinem Theile dieser Mannigfaltigkeit vorkommen darf, während ein Nullwerden in einer Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, welche in $M_{n-1,n}$ liegt, zulässig ist, und dass für jedes der Mannigfaltigkeit $M_{n-1,n}$ angehörende Werthsystem, in welchem $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ positiv oder negativ ist, die Einheit $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ das Vorzeichen von $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ erhalten soll. Die Mannigfaltigkeit $M_{n-1,n}$ ist so beschaffen, dass, nachdem unter den Variabelen zwei beliebige $z_{\mathfrak{c}}$ und $z_{\mathfrak{b}}$ ausgewählt sind, die übrigen Variabelen $z_{\mathfrak{a}}$ von diesen abhängig werden, wobei zu jedem Werthsystem $z_{\mathfrak{c}}, z_{\mathfrak{b}}$ offenbar mehrere Systeme der Variabelen $z_{\mathfrak{a}}$ gehören können. Demgemäss ersetzt man in der Form (3) jedes Differential $dz_{\mathfrak{a}}, dz_{\mathfrak{b}}$ durch den Ausdruck $\frac{dz_{\mathfrak{a}}}{dz_{\mathfrak{c}}} dz_{\mathfrak{c}}, \frac{dz_{\mathfrak{b}}}{dz_{\mathfrak{c}}} dz_{\mathfrak{c}}$, hingegen jedes Differential $\delta z_{\mathfrak{a}}, \delta z_{\mathfrak{b}}$ durch den Ausdruck $\frac{dz_{\mathfrak{a}}}{dz_{\mathfrak{b}}} dz_{\mathfrak{b}}, \frac{dz_{\mathfrak{b}}}{dz_{\mathfrak{b}}} dz_{\mathfrak{b}}$, multiplicirt die Form mit der Einheit $\varepsilon_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}$ und integrirt über einen einfach zusammenhängenden Theil T der Mannigfaltigkeit

$M_{n-1,n}$, wobei die Incremente $dz_{\mathfrak{c}}$ und $dz_{\mathfrak{d}}$ nur positiv genommen werden; alsdann entsteht der Ausdruck

(8) $J =$

$$\iint \Sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \left(\frac{da_{\mathfrak{a}}}{dz_{\mathfrak{b}}} - \frac{da_{\mathfrak{b}}}{dz_{\mathfrak{a}}}\right)\left(\frac{dz_{\mathfrak{a}}}{dz_{\mathfrak{c}}}\frac{dz_{\mathfrak{b}}}{dz_{\mathfrak{d}}} - \frac{dz_{\mathfrak{a}}}{dz_{\mathfrak{d}}}\frac{dz_{\mathfrak{b}}}{dz_{\mathfrak{c}}}\right)\varepsilon_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}\, dz_{\mathfrak{c}}\, dz_{\mathfrak{d}},$$

dessen Discussion unsere nächste Aufgabe bildet.

Die Determinanten $\frac{dz_{\mathfrak{a}}}{dz_{\mathfrak{c}}}\frac{dz_{\mathfrak{b}}}{dz_{\mathfrak{d}}} - \frac{dz_{\mathfrak{a}}}{dz_{\mathfrak{d}}}\frac{dz_{\mathfrak{b}}}{dz_{\mathfrak{c}}}$ können mit Hülfe der Gleichung (7) leicht explicite dargestellt werden. Wenn eine der Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ mit einer der Zahlen $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ zusammenfällt, etwa $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{c}$, so geht die entsprechende Determinante in den Ausdruck $\frac{dz_{\mathfrak{b}}}{dz_{\mathfrak{d}}}$ über, und die Gleichung

$$dz_{\mathfrak{b}} = -\frac{(\mathfrak{d},\mathfrak{b})}{(\mathfrak{c},\mathfrak{d})}dz_{\mathfrak{c}} - \frac{(\mathfrak{b},\mathfrak{c})}{(\mathfrak{c},\mathfrak{d})}dz_{\mathfrak{d}}$$

liefert das Resultat

$$(9) \qquad \frac{dz_{\mathfrak{b}}}{dz_{\mathfrak{d}}} = \frac{(\mathfrak{c},\mathfrak{b})}{(\mathfrak{c},\mathfrak{d})}.$$

Durch eine wiederholte Anwendung desselben

ergiebt sich aber die für alle Zahlenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ geltende Bestimmung

$$(9^*) \qquad \frac{dz_\mathfrak{a}}{dz_\mathfrak{c}}\frac{dz_\mathfrak{b}}{dz_\mathfrak{d}} - \frac{dz_\mathfrak{a}}{dz_\mathfrak{d}}\frac{dz_\mathfrak{b}}{dz_\mathfrak{c}} = \frac{(\mathfrak{a},\mathfrak{b})}{(\mathfrak{c},\mathfrak{d})}.$$

Die directe Einsetzung dieser Werthe verwandelt den Ausdruck J folgendermassen

$$(10) \quad \begin{cases} J = H \\ H = \iint \Sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \left(\frac{da_\mathfrak{a}}{dz_\mathfrak{b}} - \frac{da_\mathfrak{b}}{dz_\mathfrak{a}}\right)(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \frac{\varepsilon_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}}{(\mathfrak{c},\mathfrak{d})} dz_\mathfrak{c} dz_\mathfrak{d}. \end{cases}$$

Wenn man dagegen J in eine Summe von Integralen auflöst, und in dem Integral

$$\iint \left(\frac{da_\mathfrak{a}}{dz_\mathfrak{b}} - \frac{da_\mathfrak{b}}{dz_\mathfrak{a}}\right)\left(\frac{dz_\mathfrak{a}}{dz_\mathfrak{c}}\frac{dz_\mathfrak{b}}{dz_\mathfrak{d}} - \frac{dz_\mathfrak{a}}{dz_\mathfrak{d}}\frac{dz_\mathfrak{b}}{dz_\mathfrak{c}}\right) \varepsilon_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}\, dz_\mathfrak{c}\, dz_\mathfrak{d}$$

die Grössen $z_\mathfrak{a}$ und $z_\mathfrak{b}$ als die independenten Variabelen der Integration einführt, so geht dasselbe, weil die Substitutionsdeterminante nach (9*) das Vorzeichen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $\varepsilon_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}$ hat, in das Integral

$$\iint \left(\frac{da_\mathfrak{a}}{dz_\mathfrak{b}} - \frac{da_\mathfrak{b}}{dz_\mathfrak{a}}\right) \varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, dz_\mathfrak{a}\, dz_\mathfrak{b}$$

über, und es entsteht die Gleichung

$$(11)\quad \begin{cases} J = L \\ L = \Sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \iint \left(\frac{da_{\mathfrak{a}}}{dz_{\mathfrak{b}}} - \frac{da_{\mathfrak{b}}}{dz_{\mathfrak{a}}} \right) \varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, dz_{\mathfrak{a}}\, dz_{\mathfrak{b}}. \end{cases}$$

Dieselbe weist nach, dass der Werth des Ausdruckes J von der Wahl der Variabelen $z_{\mathfrak{c}}$, $z_{\mathfrak{b}}$ vollkommen unabhängig ist.

Da vermöge der Gleichung $(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) + (\mathfrak{b},\mathfrak{a}) = 0$ die Gleichung $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \varepsilon_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} = 0$ besteht, so hat man

$$\left(\frac{da_{\mathfrak{a}}}{dz_{\mathfrak{b}}} - \frac{da_{\mathfrak{b}}}{dz_{\mathfrak{a}}} \right) \varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \frac{da_{\mathfrak{a}}}{dz_{\mathfrak{b}}} \varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \frac{da_{\mathfrak{b}}}{dz_{\mathfrak{a}}} \varepsilon_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}},$$

und demgemäss

$$(12)\quad L = \Sigma_{\mathfrak{a}} \iint \Big(\frac{da_{\mathfrak{a}}}{dz_{\mathfrak{a}+1}} \varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}+1}\, dz_{\mathfrak{a}}\, dz_{\mathfrak{a}+1}$$
$$+ \frac{da_{\mathfrak{a}}}{dz_{\mathfrak{a}+2}} \varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}+2}\, dz_{\mathfrak{a}}\, dz_{\mathfrak{a}+2} + \cdots$$
$$+ \frac{da_{\mathfrak{a}}}{dz_{\mathfrak{a}+n-1}} \varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}+n-1}\, dz_{\mathfrak{a}}\, dz_{\mathfrak{a}+n-1} \Big),$$

wo bei allen Zeigern, welche die Zahl n übertreffen, der Werth n zu subtrahiren ist. Die Einführung der independenten Integrationsvariabelen $z_{\mathfrak{a}}$, $z_{\mathfrak{a}+1}$ giebt die Gleichung

$$(13)\quad \iint\left(\frac{da_\mathfrak{a}}{dz_{\mathfrak{a}+1}}\,\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}+1}\,dz_\mathfrak{a}\,dz_{\mathfrak{a}+1}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{da_\mathfrak{a}}{dz_{\mathfrak{a}+n-1}}\,\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}+n-1}\,dz_\mathfrak{a}\,dz_{\mathfrak{a}+n-1}\right)$$

$$=\iint\left(\frac{da_\mathfrak{a}}{dz_{\mathfrak{a}+1}}+\frac{da_\mathfrak{a}}{dz_{\mathfrak{a}+2}}\,\frac{dz_{\mathfrak{a}+2}}{dz_{\mathfrak{a}+1}}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{da_\mathfrak{a}}{dz_{\mathfrak{a}+n-1}}\,\frac{dz_{\mathfrak{a}+n-1}}{dz_{\mathfrak{a}+1}}\right)\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}+1}\,dz_\mathfrak{a}\,dz_{\mathfrak{a}+1},$$

und daher für L die Darstellung

$$(14)\quad L=\Sigma_\mathfrak{a}\iint\left(\frac{da}{dz_{\mathfrak{a}+1}}+\frac{da_\mathfrak{a}}{dz_{\mathfrak{a}+2}}\,\frac{dz_{\mathfrak{a}+2}}{dz_{\mathfrak{a}+1}}\right.$$

$$\left.+\cdots\frac{da_\mathfrak{a}}{dz_{\mathfrak{a}+n-1}}\,\frac{dz_{\mathfrak{a}+n-1}}{dz_{\mathfrak{a}+1}}\right)\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}+1}\,dz_\mathfrak{a}\,dz_{\mathfrak{a}+1}.$$

Der in der vorstehenden Klammer befindliche Ausdruck ist der vollständige Differentialquotient der Function $a_\mathfrak{a}$ nach der Variabele $z_{\mathfrak{a}+1}$, für einen constanten Werth der Variabele $z_\mathfrak{a}$. Wenn man also, bei der nach dem Element $dz_\mathfrak{a}\,dz_{\mathfrak{a}+1}$ auszuführenden Integration, der Variabele $z_\mathfrak{a}$ einen constanten Werth beilegt, so kann man die unbestimmte Integration in Bezug auf die Variabele $z_{\mathfrak{a}+1}$ in denjenigen

Intervallen derselben unmittelbar ausführen, in denen die Grösse $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}+1}$ ungeändert bleibt. Die Werthe der durch die unbestimmte Integration erhaltenen Functionen sind an den Stellen, wo die Variabele $z_{\mathfrak{a}+1}$ in das Integrationsgebiet eintritt, negativ, an den Stellen, wo die Variabele $z_{\mathfrak{a}+1}$ aus dem Integrationsgebiet heraustritt, positiv zu nehmen. Weil die Variabelen bei der gegenwärtigen Integration nur positive Incremente erhalten, so ist $dz_{\mathfrak{a}+1}$, wofern die Variabele $z_{\mathfrak{a}+1}$ immer von der betreffenden Stelle aus in das Integrationsgebiet hinein bewegt wird, für jede Eintrittsstelle eine positive, für jede Austrittsstelle eine negative Grösse. Die Grenzen der Intervalle für die Variabele $z_{\mathfrak{a}+1}$, welche sich zum Theil in der Begrenzung der Mannigfaltigkeit T, und zum Theil in den Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung befinden, in welchen die Grösse $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}+1)$ gleich Null ist, müssen jetzt sorgfältig erörtert werden.

Die Begrenzung der Mannigfaltigkeit T sei dadurch bestimmt, dass innerhalb derselben gewisse eindeutige Functionen der Variabelen $z_1, z_2, \ldots z_n$ nur positive Werthe erhalten dürfen; wenn man nach einander die verschiedenen Theile der Begrenzung betrachtet, möge die betreffende Function immer mit Θ bezeichnet werden. Dann ist bei dem Uebergange eines Werthsystems von der Begrenzung in das Innere der Mannigfaltigkeit T das Differential $d\Theta$ eine positive Grösse. Indem man zu dem System von Gleichungen (5) die Gleichung

(15) $d\Theta = \Theta_1 dz_1 + \Theta_2 dz_2 + \dots + \Theta_n dz_n$

hinzufügt, entstehe durch die Elimination von $(n-2)$ Differentialen das Resultat

(16) $R_{\mathfrak{a}+1} dz_{\mathfrak{a}} - R_{\mathfrak{a}} dz_{\mathfrak{a}+1} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}+1)\, d\Theta.$

Da nun bei der auszuführenden Integration der indefinite Werth der Variabele $z_{\mathfrak{a}}$ unverändert bleibt, mithin $dz_{\mathfrak{a}} = 0$ ist, so ergiebt sich für das Differential $dz_{\mathfrak{a}+1}$ die Bestimmung

(17) $R_{\mathfrak{a}} dz_{\mathfrak{a}+1} = -(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}+1)\, d\Theta,$

bei der die Grösse $R_{\mathfrak{a}}$ nicht gleich Null sein darf. Wenn das Vorzeichen dieser Grösse mit $\varepsilon_{\mathfrak{a}}$ notirt wird, so erhält das Differential $dz_{\mathfrak{a}+1}$ für eine in das Integrationsgebiet hinein gerichtete Bewegung der Variabele $z_{\mathfrak{a}+1}$ das Vorzeichen $-\varepsilon_{\mathfrak{a}}\,\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}+1}$. Nach dem oben Gesagten wird also jede Eintrittsstelle durch die Gleichung $\varepsilon_{\mathfrak{a}}\,\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}+1} = -1$, jede Austrittsstelle durch die Gleichung $\varepsilon_{\mathfrak{a}}\,\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}+1} = +1$ characterisirt und die in (14) durch unbestimmte Integration in Bezug auf die Variabele $z_{\mathfrak{a}+1}$ gewonnene Function $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}+1}\, a_{\mathfrak{a}}$ bekommt an jeder Stelle der Begrenzung der Mannigfaltigkeit T den Werth $\varepsilon_{\mathfrak{a}}\, a_{\mathfrak{a}}$.

Es bleibt nun die Art und Weise festzustellen, wie die Grösse $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}+1)$ innerhalb der Man-

nigfaltigkeit $M_{n-1,n}$ in einer Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung verschwinden darf. Zwischen dem Differential einer abhängigen Variabele z_c und den Differentialen der beiden unabhängigen Variabelen z_a und z_{a+1} besteht nach (7) die Gleichung

$$(a+1,c)dz_a + (c,a)dz_{a+1} + (a,a+1)dz_c = 0.$$

Da bei der Ausführung der Integration in Bezug auf z_{a+1} das Differential $dz_a = 0$ ist, so folgt die Gleichung

$$(18) \qquad (c,a)dz_{a+1} + (a,a+1)dz_c = 0,$$

durch welche dz_c vollständig bestimmt ist, so lange die Grösse $(a, a+1)$ nicht den Werth Null hat. Man gelangt daher, so lange diese Bedingung erfüllt ist, von einem jeden Werthsystem $(z_1, z_2, \ldots z_n)$, wenn der Werth z_a festgehalten, dagegen der Werth z_{a+1} um dz_{a+1} vergrössert wird, zu einem vollständig bestimmten zweiten Werthsysteme. Oben ist bemerkt worden, dass, wenn die Mannigfaltigkeit $M_{n-1,n}$ auf die unabhängigen Variabelen z_a und z_{a+1} bezogen wird, zu jedem Werthsystem z_a, z_{a+1} mehrere Werthsysteme der übrigen Variabelen z_c gehören können, und es folgt aus dem eben Gesagten, dass das Zusammenfallen mehrerer solcher Werthsysteme nur da stattfinden kann, wo die Grösse $(a, a+1)$ verschwindet. Das Ver-

schwinden in einem Theile der Mannigfaltigkeit $M_{n-1,n}$ ist schon früher ausgeschlossen. Für die Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung, in welchen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}+1)$ gleich Null wird, nehme ich an, dass, wenn einer solchen Mannigfaltigkeit die Werthcombination $z_{\mathfrak{a}}, z_{\mathfrak{a}+1}$ angehört, bei einer mit festgehaltenem Werthe $z_{\mathfrak{a}}$ in das Innere der Mannigfaltigkeit $M_{n-1,n}$ gerichteten Bewegung die Variabele $z_{\mathfrak{a}+1}$ nur ein Increment $dz_{\mathfrak{a}+1}$ von bestimmtem Vorzeichen erhalten kann, dass diesem Fortschreiten der Variabele $z_{\mathfrak{a}+1}$ der Uebergang von einem bestimmten Werthsysteme $z_{\mathfrak{c}}$ zu zwei von einander verschiedenen Werthsystemen $z_{\mathfrak{c}}$ entspricht, dass die Grösse $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}+1)$ für das eine dieser Werthsysteme positiv, für das andere negativ ist, und dass die Integration des Ausdrucks $\frac{dz_{\mathfrak{a}+1}}{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}+1)}$, von dem in Rede stehenden bis zu einem endlich von demselben differirenden Werthsysteme ausgedehnt, einen präcisen Sinn darbietet. Diese Forderungen bezeichnen den Inhalt des oben gebrauchten Ausdruckes, dass die Mannigfaltigkeit $M_{n-1,n}$ keinerlei Singularitäten enthalten dürfe. Ein einfaches Beispiel für das vorgeschriebene Verhalten einer Mannigfaltigkeit der zweiten Ordnung liefert die Voraussetzung $n = 3$, $F_1 = \frac{z_1^2}{b_1} + \frac{z_2^2}{b_2} + \frac{z_3^2}{b_3}$, wo b_1, b_2, b_3 positive Constanten sind; die Gleichung $F_1 = C_1$ stellt alsdann die Mannigfaltigkeit $M_{2,3}$

dar. Die ausgesprochenen allgemeinen Forderungen beseitigen das Bedenken, welches bei der ausgeführten Transformation von Doppelintegralen aus dem Verschwinden der Grössen $(\mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ in Nennern entstehen kann. Diese Forderungen üben ferner auf die innerhalb der Mannigfaltigkeit T nach der Variabele $z_{\mathfrak{a}+1}$ bei constantem $z_{\mathfrak{a}}$ auszuführende Integration die folgende Wirkung aus. Jede in T vorkommende Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, in welcher die Grösse $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a} + 1)$ verschwindet, ist die Grenze von je zwei Gebieten, in deren einem $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}+1} = 1$, in deren anderem $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}+1} = -1$ ist. Jedes Werthsystem dieser Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung bildet, bei constantem $z_{\mathfrak{a}}$, für die Variabele $z_{\mathfrak{a}+1}$ in beiden Gebieten gleichzeitig entweder eine Eintrittsstelle, oder eine Austrittsstelle, weil das Jncrement $dz_{\mathfrak{a}+1}$ in beiden Gebieten dasselbe bestimmte Vorzeichen erhält. Bei der auf die Variabele $z_{\mathfrak{a}+1}$ bezüglichen Integration treten deshalb in den Werthsystemen der in Rede stehenden Mannigfaltigkeit stets die beiden Functionalwerthe $+ a_{\mathfrak{a}}$ und $- a_{\mathfrak{a}}$ auf, und zerstören sich gegenseitig. Aus diesem Grunde enthält das schliessliche Resultat nur die der Begrenzung der Mannigfaltigkeit T entsprechenden, vorhin determinirten Functionalwerthe, und nimmt diese Gestalt an *)

*) Das Resultat für den Fall $n = 2$ ist von Riemann in den Abhandlungen: Grundlagen etc., pag. 9 und Lehrsätze aus der analysis situs etc., Journal f. Math. Bd. LIV, pag. 105 abgeleitet. Das Resultat für den Fall $n = 3$ befindet sich in der Arbeit von

$$(19)\quad \begin{cases} J = N \\ N = \int (a_1 \varepsilon_1 \, dz_1 + a_2 \varepsilon_2 dz_2 + \ldots + a_n \varepsilon_n dz_n). \end{cases}$$

Hier ist in Betreff der n Vorzeichen ε_a eine Bemerkung zu machen. Versteht man unter Φ eine eindeutige Function der Variabelen $z_1, z_2, \ldots z_n$, und bildet die n Gleichungen

$$(20)\quad \begin{cases} F_{1,1} \, dz_1 + F_{1,2} \, dz_2 + \ldots + F_{1,n} \, dz_n = 0 \\ F_{2,1} \, dz_1 + F_{2,2} \, dz_2 + \ldots + F_{2,n} \, dz_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{n-2,1} dz_1 + F_{n-2,2} dz_2 + \ldots + F_{n-2,n} dz_n = 0 \\ \Theta_1 \, dz_1 + \Theta_2 \, dz_2 + \ldots + \Theta_n \, dz_n = 0 \\ \Phi_1 \, dz_1 + \Phi_2 \, dz_2 + \ldots + \Phi_n \, dz_n = d\Phi, \end{cases}$$

ist ferner R die Determinante der n^2 Grössen der linken Seite, und von Null verschieden, so ergeben sich durch Auflösung die Gleichungen

$$(21)\qquad R \, dz_a = R_a \, d\Phi.$$

Vermöge derselben werden die n Differentiale dz_a

H. Hankel, Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten. Göttingen 1861; von dieser Arbeit habe ich jedoch nur den in den Fortschritten der Physik v. J. 1861, pag. 57 mitgetheilten Auszug kennen gelernt.

durch das eine Differential $d\Phi$, und die Vorzeichen der n Differentiale $ds_{\mathfrak{a}}$ durch die Vorzeichen $\varepsilon_{\mathfrak{a}}$ der Grössen $R_{\mathfrak{a}}$ und die Vorzeichen der Grössen R und $d\Phi$ bestimmt. Setzt man nun fest, dass das Differential $d\Phi$ das Vorzeichen der Determinante R erhalten soll, so bekommt jedes Differential $ds_{\mathfrak{a}}$ für die Begrenzung der Mannigfaltigkeit T, auf welche sich die Gleichungen (20) beziehen, das Vorzeichen $\varepsilon_{\mathfrak{a}}$ der Grösse $R_{\mathfrak{a}}$. Diese Bestimmung bezeichnet den Sinn, in welchem ein Werthsystem die betreffende geschlossene Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung durchläuft, und fällt zusammen mit der Bestimmung durch das von Herrn Kronecker entwickelte Fortgangsprincip*). Das Element des einfachen Integrals N ist die lineare Form (2), das Element des doppelten Integrals die bilineare zu der Form (2) covariante Form (3), und die Relation (19) spricht die Gleichheit der beiden Integrale aus.

2.

Von der Relation (19) soll jetzt eine zweifache Anwendung gemacht werden. Für die erste Anwendung wird vorausgesetzt, dass die Form (3) identisch verschwindet, oder, dass innerhalb des ganzen Gebietes G die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen der Integrabilität

$$(22)\qquad \frac{da_{\mathfrak{a}}}{ds_{\mathfrak{b}}} - \frac{da_{\mathfrak{b}}}{ds_{\mathfrak{a}}} = 0$$

*) l. c. pag. 160.

für die Form (2) erfüllt sind. Weil in Folge dessen der Ausdruck J gleich Null ist, so entsteht aus (19) die Gleichung

$$(23)\ N = \int (a_1 \varepsilon_1 dz_1 + a_2 \varepsilon_2 dz_2 + \dots + a_n \varepsilon_n dz_n) = 0.$$

In der Begrenzung der einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit T nehme man ein festes Werthsystem $(z_1(0), z_2(0), \dots z_n(0))$ und ein bewegliches Werthsystem $(z_1, z_2, \dots z_n)$ an, und nenne die beiden Theile, in welche durch diese beiden Werthsysteme die Begrenzung zerfällt, S und S'. Der Theil S sei derjenige, welcher zunimmt, wenn man den Variabelen $z_1, z_2 \dots z_n$ des beweglichen Werthsystemes beziehungsweise die Incremente $\varepsilon_1 dz_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n dz_n$ hinzufügt. Dann zeigt die Gleichung (23), dass das Integral

$$(23^*)\quad \int (a_1 \varepsilon_1 dz_1 + a_2 \varepsilon_2 dz_2 + \dots + a_n \varepsilon_n dz_n)$$

über den Theil S ausgedehnt, und das Integral

$$(23^{**})\quad -\int (a_1 \varepsilon_1 dz_1 + a_2 \varepsilon_2 dz_2 + \dots + a_n \varepsilon_n dz_n)$$

über den Theil S' ausgedehnt, einander gleich sind. Wenn ein Werthsystem $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots \mathfrak{z}_n)$ den Theil S von dem Werthsysteme $(z_1(0), z_2(0) \dots z_n(0))$ bis zu dem Werthsysteme $(z_1, z_2, \dots z_n)$ durchläuft, so erhält jede Variabele $\mathfrak{z}_\alpha$ das Increment $\varepsilon_\alpha d\mathfrak{z}_\alpha$; wenn ein Werthsystem $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots {}_n)$ den Theil S' von dem

Werthsysteme $(z_1(0), z_2(0), \ldots z_n(0))$ bis zu dem Werthsysteme $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ durchläuft, so erhält jede Variabele $\mathfrak{z}_a$ das Increment $- \varepsilon_a d\mathfrak{z}_a$. Der Werth $\mathfrak{E}$ des Integrales (23*) ist demnach unabhängig von der Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, über die sich dasselbe von dem Werthsysteme $(z_1(0)\ z_2(0), \ldots z_n(0))$ bis zu dem Werthsysteme $(z_1, z_2, \ldots z_n($ ersteckt und $\mathfrak{E}$ ist insofern eine Function der Variabelen $z_1, z_2, \ldots z_n$, welche verschwindet, sobald für jeden Werth von a die Gleichung $z_a = z_a(0)$ eintritt. Versteht man unter $\varkappa$ eine beliebig kleine, positive gegebene Grösse, unter η_a einen positiven oder negativen echten Bruch, so kann man vermöge der Stetigkeit der Functionen q_a bei jedem Werthsystem $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ der einzelnen Variabele z_a einen solchen Zuwachs ζ_a ertheilen, während die übrigen Variabelen ungeändert bleiben, dass die Gleichung gilt

$$(24) \quad \mathfrak{E}(z_a + \zeta_a) - \mathfrak{E}(z_a) = (a_a + \eta_a \varkappa)\ \zeta_a.$$

Dieselbe lehrt durch einen Uebergang zur Grenze, dass die Ableitung der Function $\mathfrak{E}$ nach der Variabele z_a gleich der Grösse a_a ist, und erweist somit, wie geschehen sollte, die Integrabilität des Ausdruckes (2) unter der Voraussetzung der Gleichungen (22).

Wenn eine Function $\mathfrak{F}$ der Variabelen $z_1, z_2, \ldots z_n$ vorliegt, die für das Werthsystem $z_a = z_a(0)$ gleich Null wird, und deren Ablei-

tungen nach z_α beziehungsweise gleich den Grössen a_α sind, und wenn bei einer von vorne herein gegebenen, beliebig kleinen positiven Grösse $\varkappa$ für jedes Werthsystem $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ des Gebietes G jeder einzelnen Variabele z_α eine in Bezug auf ihre Grösse von diesem Werthsysteme unabhängige Zunahme ζ_α beigelegt werden kann, die der Gleichung

$$(24^*) \quad \mathfrak{F}(z_\alpha + \zeta_\alpha) - \mathfrak{F}(z_\alpha) = (a_\alpha + \eta_\alpha \varkappa)\,\zeta_\alpha$$

entspricht, so lässt sich zeigen, dass diese Function $\mathfrak{F}$ mit der oben definirten Function $\mathfrak{E}$ identisch ist. Mein Freund und College Kortum hat mich mündlich darauf aufmerksam gemacht, dass die für die Beweisführung nothwendige Forderung (24*) ausdrücklich formulirt werden muss, da die Gleichung $\frac{d\mathfrak{F}}{dz_\alpha} = a_\alpha$ sehr wohl bestehen kann, ohne dass diese Forderung erfüllt ist. Diese Ueberlegung ist von sehr verwandter Natur mit denjenigen Erörterungen, welche Herr Heine in der Abhandlung über trigonometrische Reihen, Journal f. Math. Bd. LXXI, pag. 353 angestellt hat.

Für die sämmtlichen Functionen F_c des gegebenen Systems wird demnach vorausgesetzt, dass die Gleichung

$$F_c(z_\alpha + \zeta_\alpha) - F_c(z_\alpha) = \left(\frac{dF_c}{dz_\alpha} + \eta_\alpha\,\varkappa\right)\zeta_\alpha$$

in der erklärten Bedeutung befriedigt werden könne. Alsdann liefert der Ausdruck (23*) bei der speciellen Annahme

$$(25)\qquad a_{\mathfrak{a}} = \frac{dF_{n-1}}{dz_{\mathfrak{a}}}$$

die Gleichung

$$(25^*)\, F_{n-1}(z_1, z_2, \ldots z_n) - F_{n-1}(z_1(0), z_2(0), \ldots z_n(0))$$

$$= \Sigma_{\mathfrak{a}} \int \frac{dF_{n-1}}{dz_{\mathfrak{a}}} \, z_{\mathfrak{a}} \, dz_{\mathfrak{a}}.$$

Bei der Ausführung einer jeden bestimmten Integration wird die entsprechende Voraussetzung gemacht.

Die zweite Anwendung der Gleichung (19) gründet sich darauf, dass den Functionen $a_{\mathfrak{a}}$ die Bestimmung

$$(26)\qquad a_{\mathfrak{a}} = \frac{dF_{n-1}}{dz_{\mathfrak{a}}} F_n$$

gegeben wird. Vermöge derselben ist

$$(26^*)\quad \frac{da_{\mathfrak{a}}}{dz_{\mathfrak{b}}} - \frac{da_{\mathfrak{b}}}{dz_{\mathfrak{a}}} = \frac{dF_{n-1}}{dz_{\mathfrak{a}}} \frac{dF_n}{dz_{\mathfrak{b}}} - \frac{dF_{n-1}}{dz_{\mathfrak{a}}} \frac{dF_n}{dz_{\mathfrak{b}}},$$

und die in (10) nach den Indices $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zu nehmende Summe wird gleich der Functionaldeterminante des Systems F_1, F_2, . . . F_n,

$$(27)\qquad \Sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \left(\frac{da_{\mathfrak{a}}}{dz_{\mathfrak{b}}} - \frac{da_{\mathfrak{b}}}{dz_{\mathfrak{a}}} \right) (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \Delta.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in das Integral H, und die Ausdrücke (26) in das Integral N, so liefern (10) und (19) die Gleichung *)

$$(28) \quad \iint \Delta \frac{\varepsilon_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{(\mathfrak{c},\mathfrak{b})} dz_{\mathfrak{c}}\, dz_{\mathfrak{b}} = \int F_n \Sigma_{\mathfrak{a}} \frac{dF_{n-1}}{dz_{\mathfrak{a}}} \varepsilon_{\mathfrak{a}}\, dz_{\mathfrak{a}}.$$

Dieselbe reducirt sich in dem Falle $n = 2$ auf die Gleichung

$$(29) \quad \iint \left(\frac{dF_1}{dz_1} \frac{dF_2}{dz_2} - \frac{dF_1}{dz_2} \frac{dF_2}{dz_1} \right) dz_1\, dz_2$$
$$= \int F_2 \left(\frac{dF_1}{dz_1} \varepsilon_1\, dz_1 + \frac{dF_1}{dz_2} \varepsilon_2\, dz_2 \right),$$

welche Riemann in der Abhandlung über die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung pag. 12 und ff. aufgestellt hat. Aus einem anhaltenden Studium dieser Gleichung ist der Beweis des oben ausgesprochenen Theorems hervorgegangen, den ich jetzt mittheilen werde.

3.

Gesetzt, es existirten zwei von einander verschiedene Werthsysteme $(z_1(0), z_2(0), \ldots z_n(0)$, oder $W(0)$, und $(z_1(1), z_2(1), \ldots z_n(1))$, oder $W(1)$, welche den n Gleichungen (1)

$$F_1 = C_1, F_2 = C_2, \ldots F_n = C_n$$

genügen. Man betrachtet nun eine beliebige von den Mannigfaltigkeiten $M_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}$, und dies sei

*) Die Deduction der Gleichung (19) verlangt die mehrfach erwähnte Voraussetzung für die ersten Ableitungen der Functionen $a_{\mathfrak{a}}$; deshalb müssen auch die zweiten Ableitungen der Functionen $F_{\mathfrak{c}}$ der Voraussetzung genügen.

wieder die Mannigfaltigkeit $M_{n-, n}$. Nach der Voraussetzung ist sie einfach zusammenhängend, und in derselben bezeichnen sowohl die Gleichung $F_{n-1} = C_{n-1}$, wie auch die Gleichung $F_n = C_n$ Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung, die sich von einem Werthsysteme der begrenzenden Mannigfaltigkeit bis zu einem zweiten Werthsysteme derselben einfach erstrecken. Deshalb wird $M_{n-1,n}$ sowohl durch die Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung $F_{n-1} = C_{n-1}$, wie auch durch die Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung $F_n = C_n$ in zwei einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten getheilt*), die respective durch die Ungleichheiten $F_{n-1} - C_{n-1} > 0$, $F_{n-1} - C_{n-1} < 0$, und $F_n - C_n > 0$, $F_n - C_n < 0$ characterisirt sind. Die Werthsysteme $W(0)$ und $W(1)$ gehören jeder der beiden Mannigfaltigkeiten $F_{n-1} = C_{n-1}$ und $F_n = C_n$ an, und in beiden ist das Fortschreiten von dem Werthsysteme $W(0)$ bis zu dem Werthsysteme $W(1)$ nur auf eine einzige Art möglich. Nach der geltenden Voraussetzung haben die Mannigfaltigkeiten $F_{n-1} = C_{n-1}$ und $F_n = C_n$ innerhalb der Mannigfaltigkeit $M_{n-1,n}$ entweder eine endliche Zahl von endlich verschiedenen gemeinschaftlichen Werthsystemen, oder sie coincidiren vollständig in endlichen Theilen. Beide Möglichkeiten sind getrennt in Erwägung zu ziehen.

Für den ersten Fall sei W das erste Werthsystem, in welchem die Mannigfaltigkeiten der

*) Riemann, Grundlagen etc., pag. 6.

ersten Ordnung $F_{n-1} = C_{n-1}$ und $F_n = C_n$ bei einer von $W(0)$ in dem angegebenen Sinne ausgeführten Bewegung zusammentreffen. Der von $W(0)$ bis W sich erstreckende Theil der Mannigfaltigkeit $F_{n-1} = C_{n-1}$ heisse S, der von $W(0)$ bis W sich erstreckende Theil der Mannigfaltigkeit $F_n = C_n$ heisse S'. Dann wird von S und S' ein einfach zusammenhängender endlicher Theil der Mannigfaltigkeit $M_{n-1,n}$ begrenzt, und auf diesen Theil T soll die Gleichung (28) bezogen werden. In dieser Gleichung besteht das Integral $\int F_n \Sigma_\mathfrak{a} \frac{dF_{n-1}}{dz_\mathfrak{a}} \varepsilon_\mathfrak{a} dz_\mathfrak{a}$ aus zwei Bestandtheilen, von denen der erste über S, der zweite über S' ausgedehnt ist. Das über S ausgedehnte erste Integral erhält den Werth Null, weil nach der Definition für jedes Werthsystem von S das Aggregat $\Sigma_\mathfrak{a} \frac{dF_{n-1}}{dz_\mathfrak{a}} \varepsilon_\mathfrak{a} dz_\mathfrak{a}$ verschwindet. In dem über S' ausgedehnten zweiten Integral hat die Function F_n den constanten Werth C_n, so dass

$$\int F_n \Sigma_\mathfrak{a} \frac{dF_{n-1}}{dz_\mathfrak{a}} \varepsilon_\mathfrak{a} dz_\mathfrak{a} = C_n \int \Sigma_\mathfrak{a} \frac{dF_{n-1}}{dz_\mathfrak{a}} \varepsilon_\mathfrak{a} dz\mathfrak{a}$$

wird. Das Integral $\int \Sigma_\mathfrak{a} \frac{dF_{n-1}}{dz_\mathfrak{a}} \varepsilon_\mathfrak{a} dz_\mathfrak{a}$ ist nach (25*) gleich der Differenz der Werthe der Fun-

ction F_{n-1} für die Systeme W und $W(0)$, mithin unter den obwaltenden Verhältnissen gleich Null. Folglich verschwindet auch das zweite Integral, und somit der ganze Werth der rechten Seite von (28). Demnach besteht unter den angegebenen Voraussetzungen die Gleichung

$$(30) \qquad \iint \Delta \frac{\varepsilon_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}\, dz_{\mathfrak{c}}\, dz_{\mathfrak{b}}}{(\mathfrak{c},\mathfrak{b})} = 0.$$

Bis hierher ist keine specielle Voraussetzung in Betreff der Functionaldeterminante Δ zur Anwendung gekommen. Es besteht aber die Voraussetzung, dass Δ in dem ganzen Gebiete G, und daher auch in der ganzen Mannigfaltigkeit T nirgend das Vorzeichen ändere. Weil nun in dem vorstehendem Integral das Element $\frac{\varepsilon_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{(\mathfrak{c},\mathfrak{b})} dz_{\mathfrak{c}}\, dz_{\mathfrak{b}}$ immer positiv, die Grösse Δ entweder immer positiv oder immer negativ ist, so kann der Werth des Integrals nicht verschwinden, und die Gleichung (30) enthält einen Widerspruch. Deshalb ist die Annahme, dass die Gleichungen (1) durch die beiden Werthsysteme $W(0)$ und $W(1)$ erfüllt werden, verbunden mit der Annahme, dass in $M_{n-1,n}$ die Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung $F_{n-1} = C_{n-1}$ und $F_n = C_n$ eine endliche Zahl endlich von einander verschiedener gemeinsamer Werthsysteme haben, unzulässig.

Der zweite Fall, der bei der Annahme der Werthsysteme $W(0)$ und $W(1)$ in Betracht kommt, ist der, dass die in

$M_{n-1,n}$ enthaltenen Mannigfaltigkeiten der ersten Ordnung $F_{n-1} = C_{n-1}$ und $F_n = C_n$ bei einer von $W(0)$ nach $W(1)$ ausgeführten Bewegung in einem endlichen Theile coincidiren. Man sieht sogleich, dass für diesen Theil die totalen Differentiale der Functionen F_a sämmtlich gleich Null werden mussten. Allein die n Gleichungen

$$F_{1,1}\,dz_1 + F_{1,2}\,dz_2 + \ldots + F_{1,n}\,dz_n = 0$$

$$F_{2,1}\,dz_1 + F_{2,2}\,dz_2 + \ldots + F_{2,n}\,dz_n = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F_{n,1}\,dz_1 + F_{n,2}\,dz_2 + \ldots + F_{n,n}\,dz_n = 0$$

ziehen das Verschwinden der Functionaldeterminante Δ nach sich, welches durch die Voraussetzung ausgeschlossen ist. Also kann dieser zweite Fall eben so wenig eintreten, als der schon behandelte erste, und die Behauptung, dass die n Gleichungen (1) unter den aufgestellten Bedingungen nur durch ein einziges Werthsystem $z_1, z_2, \ldots z_n$ erfüllt werden können, ist erwiesen.

Wenn man mit Riemann die n Variabelen $z_1, z_2, \ldots z_n$ als die Coordinaten eines Punktes in einer $n$fachen Mannigfaltigkeit ansieht, so ergiebt sich, dass die gegenwärtige Untersuchung den Begriff des Linearelements dieser Mannigfaltigkeit (Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, pag. 7) nicht enthält. Die oben angeführten Riemann'-

schen Deductionen der Gleichung (19) für den Fall $n = 2$ zeigen, unter diesem Gesichtspuncte verglichen, einen merkwürdigen Unterschied. Das in (19) mit N bezeichnete Integral wird in der ersten Arbeit auf das Linearelement der begrenzenden Curve des Flächenstückes T bezogen, dagegen in der zweiten Arbeit als das Integral eines Ausdruckes von zwei Differentialen aufgefasst.

4.

Wenn die Bedingungen erfüllt sind, unter denen die Gleichungen

$$(31)\qquad \begin{aligned} F_1(z_1, z_2, \ldots z_n) &= X_1, \\ F_2(z_1, z_2, \ldots z_n) &= X_2, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ F_n(z_1, z_2, \ldots z_n) &= X_n \end{aligned}$$

nur durch ein Werthsystem $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ befriedigt werden können, so lässt sich die Bestimmung dieses Werthsystems folgendermassen bewerkstelligen. Durch die Substitution des speciellen Werthsystems $z_a = z_a(0)$ entsteht das System von Gleichungen

$$(32)\qquad \begin{aligned} F_1(z_1(0), z_2(0), \ldots z_n(0)) &= X_1(0), \\ F_2(z_1(0), z_2(0), \ldots z_n(0)) &= X_2(0), \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ F_n(z_1(0), z_2(0), \ldots z_n(0)) &= X_n(0). \end{aligned}$$

Man fragt zunächst nach demjenigen Werthsystem $(z_1(1), z_2(1), \ldots z_n(1))$, welches den n Gleichungen

$$(33)\quad F_1 = X_1(0),\ F_2 = X_2(0),\ \ldots\ F_{n-1} = X_{n-1}(0),\ F_n = X_n$$

genügt. Die Totalität der Werthsysteme, bei denen die sämmtlichen Functionen $F_{\mathfrak{b}}$ mit Ausnahme von F_n beziehungsweise die festen Werthe $X_{\mathfrak{b}}(0)$ behalten, dagegen F_n die Werthe von $X_n(0)$ bis X_n stetig durchläuft, bildet eine einfache Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, und wird durch das Verschwinden der $(n-1)$ Differentiale $F_{\mathfrak{b}}$, also durch das System von Gleichungen

$$(34)\quad \begin{cases} F_{1,1}\, dz_1 + F_{1,2}\, dz_2 + \ldots + F_{1,n}\, dz_n = 0 \\ F_{2,1}\, dz_1 + F_{2,2}\, dz_2 + \ldots + F_{2,n}\, dz_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{n-1,1}\, dz_1 + F_{n-1,2}\, dz_2 + \ldots + F_{n-1,n}\, dz_n = 0 \\ F_{n,1}\, dz_1 + F_{n,2}\, dz_2 + \ldots + F_{n,n}\, dz_n = dF_n \end{cases}$$

characterisirt. Dasselbe kann als ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen aufgefasst werden, bei welchem die n Grössen $z_{\mathfrak{a}}$ von der independenten Variabele F_n abhängen. Die algebraische Auflösung der Gleichungen (34)

giebt für die Differentialquotienten $\frac{dz_a}{dF}$, da die Functionaldeterminante Δ innerhalb des ganzen Gebietes G nicht gleich Null werden darf, die eindeutigen endlichen Ausdrücke

$$(35) \qquad \frac{dz_a}{dF_n} = \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dF_{n,a}}.$$

Die Grössen z_a sind so zu bestimmen, dass sie, während die Variabele F_n von dem Werthe $X_n(0)$ bis zu dem Werthe X_n läuft, sich stetig ändern, und für den Werth $F_n = X_n(0)$ die Gleichungen $z_a = z_a(0)$ erfüllen. Das den Gleichungen (33) genügende Werthsystem $(z_1(1), z_2(1), \dots z_n(1))$ ist alsdann dasjenige, welches dem Werthe $F_n = X_n$ correspondirt.

Die so eben ausgesprochene Aufgabe ist in der allgemeineren Aufgabe enthalten, wenn für ein gewisses Gebiet der reellen Variabelen $x, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \dots \overset{n}{y}$ die n Functionen $\overset{a}{f}(x, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \dots \overset{n}{y})$ eindeutig, reell, endlich und stetig gegeben sind, das System von Differentialgleichungen

$$\frac{d\overset{a}{y}}{dx} = \overset{a}{f}(x, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \dots \overset{n}{y})$$

so zu integriren, dass die n Functionen $\overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \dots \overset{n}{y}$,

während die independente Variabele x einen gewissen endlichen Weg durchläuft, sich stetig ändern und für den in diesem Wege enthaltenen Werth $x = x_0$ die vorgeschriebenen Werthe $\overset{\alpha}{y} = \overset{\alpha}{y}_0$ annehmen. In einer Untersuchung, welche ich im Zusammenhange mit der gegenwärtigen Arbeit unternommen, jedoch unabhängig publicirt habe *), wird unter gewissen Stetigkeitsbedingungen durch ein schrittweise fortgehendes Verfahren ein System von Functionen $\overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \dots \overset{n}{y}$ abgeleitet, welches die aufgestellten Forderungen mit beliebiger Genauigkeit erfüllt. Es sei ferner $\overset{\alpha}{y} = \overset{\alpha}{Y}$ eine gegebene Auflösung von der bezeichneten Beschaffenheit; man zerlege das von x_0 bis $x_0 + A_0$ ausgedehnte Intervall der Variabele durch Einschalten der ihrer Grösse nach geordneten Werthe $x_1, x_2, \dots x_{p-1}$, $\overset{\alpha}{\varepsilon}_\alpha$ bedeute einen positiven oder negativen echten Bruch, λ eine beliebig kleine positive gegebene Grösse, die Zahl α gehe von 1 bis $p-1$, das Werthsystem $\overset{\alpha}{y} = \overset{\alpha}{Y}_\alpha$, gehöre zu dem Werthe $x = x_\alpha$, und es bestehe die Reihe von Gleichungen

$$\overset{\alpha}{Y}_{\alpha+1} - \overset{\alpha}{Y}_\alpha = (\overset{\alpha}{f}(x_\alpha, \overset{1}{Y}_\alpha, \overset{2}{Y}_\alpha, \dots \overset{n}{Y}_\alpha) + \overset{\alpha}{\varepsilon}_\alpha \lambda)(x_{\alpha+1} - x_\alpha).$$

*) Erörterung der Möglichkeit, ein gegebenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen vollständig zu integriren. Bonn, 1868. Disamina della possibilità etc. Annali di matematica, Serie II*a*, Tomo II°, Fasc. IV°, pag. 288.

Dann ist in derselben Arbeit bewiesen, dass das System $\overset{a}{Y}$ mit dem vorher erwähnten System $\overset{a}{y}$ nothwendig identisch ist. In Uebereinstimmung zu den Bemerkungen, welche oben bei den Gleichungen (24) und (24*) gemacht sind, formulire ich die Gültigkeit der vorstehenden Reihe von Gleichungen ebenfalls ausdrücklich als eine Forderung. Bei den Integrationen der Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen, welche in den von mir veröffentlichten Arbeiten auftreten, wird durchgehends vorausgesetzt, dass diese Forderung erfüllt ist.

Die den Functionen $\overset{a}{f}(x, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \dots \overset{n}{y})$ auferlegten Stetigkeitsbedingungen sind immer erfüllt, wofern dieselben in Bezug auf die Variabelen $\overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \dots \overset{n}{y}$ eindeutig bestimmte, endliche und stetige erste partielle Ableitungen haben *); auch diese Ableitungen müssen die oben bei den Gleichungen (24*) bezeichnete Eigenschaft besitzen. Bei der Anwendung auf das System von Differentialgleichungen (35) zeigt es sich, dass diese Voraussetzung eine Folge der früher aufgestellten Bedingungen ist. Denn die ersten Ableitungen der Ausdrücke $\frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{dF_{n\mathfrak{a}}}$ nach den Variabelen $z_{\mathfrak{b}}$ setzen sich aus den ersten und den zweiten Ableitungen der Functionen $F_{\mathfrak{c}}$ nach den Variabelen $z_{\mathfrak{b}}$ zusammen, und für diese Ableitungen der Functionen $F_{\mathfrak{c}}$

*) pag. 56 des deutschen, pag. 300 des italiänischen Textes.

ist die in Rede stehende Beschaffenheit in Art. 2 festgesetzt worden. Denkt man sich die Functionen F_c durch Integration exacter Differentiale entstanden, so führen die correspondirenden Bedingungen der Integrabilität ebenfalls auf die zweiten partiellen Ableitungen zurück. Unter den obwaltenden Verhältnissen hat man also eine Darstellung des Werthsystemes $(z_1(1), z_2(1), \ldots z_n(1))$, das den Gleichungen (33) genügt.

Nachdem das Werthsystem $(z_1(1), z_2(1), \ldots z_n(1))$ bestimmt ist, wird dasjenige Werthsystem $(z_1(2), z_2(2), \ldots z_n(2))$ verlangt, welches die n Gleichungen

$$(36)\quad F_1 = X_1(0), \ldots F_{n-2} = X_{n-2}(0), \quad F_{n-1} = X_{n-1}, \; F_n = X_n$$

erfüllt. Hier bildet die Totalität der Werthsysteme, bei denen die Functionen $F_1 = X_1(0), \ldots F_{n-2} = X_{n-2}(0), F_n = X_n$ sind, die Function F_{n-1} jedoch die Werthe von $X_{n-1}(0)$ bis X_{n-1} stetig durchläuft, eine einfache Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, die durch das System von Gleichungen

$$(37)\left\{\begin{array}{l} F_{1,1}\, dz_1 + F_{1,2}\, dz_2 + \ldots + F_{1,n}\, dz_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{n-2,1}\, dz_1 + F_{n-2,2}\, dz_2 + \ldots + F_{n-2,n}\, dz_n = 0 \\ F_{n-1,1}\, dz_1 + F_{n-1,2}\, dz_2 + \ldots + F_{n-1,n}\, dz_n = dF_{n-1} \\ F_{n,1}\, dz_1 + F_{n,2}\, dz_2 + \ldots + F_{n,n}\, dz_n = 0 \end{array}\right.$$

characterisirt ist. Dasselbe liefert das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(38)\qquad \frac{dz_{\alpha}}{dF_{n-1}} = \frac{1}{\Delta}\,\frac{d\Delta}{dF_{n-1,\alpha}},$$

wo die Grössen z_α, wenn die independente Variabele F_{n-1} von dem Werthe $X_{n-1}(0)$ bis zu dem Werthe X_{n-1} geht, sich stetig ändern, und für den Werth $F_{n-1} = X_{n-1}(0)$ die Gleichungen $z_\alpha = z_\alpha(0)$ befriedigen müssen Von der Integration des Systems (38) gilt alles dasjenige, was über die Integration des Systems (35) gesagt worden ist, und das gesuchte System $z_1(2), z_2(2), \ldots z_n(2)$, welches dem Werthe $F_{n-1} = X_{n-1}$ entspricht, darf unter den correspondirenden Bedingungen als bekannt angesehen werden.

Es ist klar, dass man das eingeschlagene Verfahren wiederholen, und durch successive Integration von n Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen, welche die Gestalt von (35) haben, zu einer Bestimmung des Systems $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ gelangen kann, welches den Gleichungen (31) genügt. Hier ist jedoch der Umstand von wesentlicher Bedeutung, dass, wenn man bei diesen Integrationen die Reihenfolge der Functionen F_α ändert, der Gang der sämmtlichen Operationen, durch die das definitive Resultat entsteht, ebenfalls durchaus geändert wird. Deshalb ist es keinesweges von selbst

einleuchtend, dass die aus den verschiedenen Verfahrungsarten hervorgehenden Bestimmungen dasselbe Resultat liefern. Weil aber die in den ersten Artikeln durchgeführte Untersuchung Bedingungen kennen lehrt, unter denen das System (31) die Grössen $z_{\mathfrak{a}}$ eindeutig bestimmt, so ergiebt die Voraussetzung jener Bedingungen das Recht zu der Aussage, dass vermöge des so eben entwickelten Verfahrens die Grössen $z_1, z_2, \ldots z_n$ in ihrer eindeutigen Abhängigkeit von den Werthen $X_1, X_2, \ldots X_n$ dargestellt werden; und hierin bestand der Zweck dieses Verfahrens.

5.

Die angestellten Betrachtungen sollen jetzt auf ein System von complexen Functionen übertragen werden. Es sei die bisher mit n bezeichnete Zahl gleich einer geraden Zahl $2m$, i gleich der imaginären Einheit $\sqrt{-1}$, die Zeiger $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$ mögen die Reihe der Zahlen von 1 bis m durchlaufen, und es mögen sowohl je zwei Functionen $F_{\mathfrak{a}}$, wie auch je zwei Variabelen $z_{\mathfrak{b}}$ durch die Gleichungen

$$(39) \quad f_{\mathfrak{p}} = F_{\mathfrak{p}} + i F_{m+\mathfrak{p}}, \quad y_{\mathfrak{q}} = z_{\mathfrak{q}} + i z_{m+\mathfrak{q}}$$

combinirt werden. Damit ein Ausdruck $f_{\mathfrak{p}}$ eine complexe Function der m complexen Variabelen $y_{\mathfrak{q}}$ sei, ist es nothwendig und hinreichend, dass zwischen den Differentialen

$$(39^*) \quad df_{\mathfrak{p}} = dF_{\mathfrak{p}} + i dF_{m+\mathfrak{p}}, \quad dy_{\mathfrak{q}} = dz_{\mathfrak{q}} + i dz_{m+\mathfrak{q}}$$

die Gleichung

$$(40) \qquad df_{\mathfrak{p}} = \Sigma_{\mathfrak{q}}\, f_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}\, dy_{\mathfrak{q}}$$

bestehe, wo mit $f_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ endliche complexe von den Variabelen $z_1, z_2, \ldots z_n$ abhängige Ausdrücke bezeichnet sind. Wenn man diese Relation mit der allgemein gültigen Relation

$$(41) \qquad df_{\mathfrak{p}} = dF_{\mathfrak{p}} + i\, dF_{m+\mathfrak{p}}$$

$$= \Sigma_{\mathfrak{q}} \left(\frac{dF_{\mathfrak{p}}}{dz_{\mathfrak{q}}} + i\, \frac{dF_{m+\mathfrak{p}}}{dz_{\mathfrak{q}}} \right) dz_{\mathfrak{q}}$$

$$+ \Sigma_{\mathfrak{q}} \left(\frac{dF_{\mathfrak{p}}}{dz_{m+\mathfrak{q}}} + i\, \frac{dF_{m+\mathfrak{p}}}{dz_{m+\mathfrak{q}}} \right) dz_{m+\mathfrak{q}}$$

vergleicht, so ergiebt sich das System von Relationen

$$(42) \qquad f_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} = \frac{dF_{\mathfrak{p}}}{dz_{\mathfrak{q}}} + i\, \frac{dF_{m+\mathfrak{p}}}{dz_{\mathfrak{q}}}$$

$$= -\, i \left(\frac{dF_{\mathfrak{p}}}{dz_{m+\mathfrak{q}}} + i\, \frac{dF_{m+\mathfrak{p}}}{dz_{m+\mathfrak{q}}} \right),$$

welches umgekehrt die Gleichung (40) zur Folge hat. Es wird vorausgesetzt, dass für jeden der Ausdrücke $f_{\mathfrak{p}}$ die bezügliche Gleichung (40) gilt, oder, dass die Ausdrücke $f_{\mathfrak{p}}$ ein System

von Functionen der complexen Variabelen $y_1, y_2, \ldots y_m$ bilden. Nun liefere die algebraische Auflösung der m Gleichungen (40) das System von Bestimmungen

$$(43) \qquad dy_{\mathfrak{q}} = \Sigma_{\mathfrak{p}}\, y_{\mathfrak{q},\mathfrak{p}}\, df_{\mathfrak{p}}.$$

Wenn es hier gestattet ist, die reellen Grössen $z_1, z_2, \ldots z_{2m}$ als Functionen der reellen Werthe $F_1, F_2, \ldots F_{2m}$ aufzufassen, so gehen die Ausdrücke $y_{\mathfrak{q},\mathfrak{p}}$ in Functionen der Werthe $F_1, F_2, \ldots F_{2m}$ über, und die Gleichungen (43) sprechen die Thatsache aus, dass die Grössen $y_{\mathfrak{q}}$ complexe Functionen der complexen Grössen $f_{\mathfrak{p}}$ werden. Sobald daher vermöge der in den früheren Artikeln entwickelten Bedingungen die reellen Grössen $z_1, z_2, \ldots z_{2m}$ eindeutige Functionen der reellen Werthe $F_1, F_2, \ldots F_{2m}$ sind, so besteht für das Functionensystem $f_1, f_2 \ldots fm$ der complexen Variabelen $y_1, y_2, \ldots ym$ die Berechtigung, diese Beziehung umzukehren, und die Grössen $y_1, y_2, \ldots ym$ als eindeutige complexe Functionen der complexen Variabelen $f_1, f_2, \ldots fm$ zu betrachten.

Um für die gegenwärtige Voraussetzung die Functionaldeterminante Δ der reellen Functionen $F_1, F_2, \ldots F_{2m}$ in Bezug auf die reellen Variabelen $z_1, z_2, \ldots z_{2m}$ zu bilden, seien die mit $f_{\mathfrak{p}}, y_{\mathfrak{q}}, f_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ conjugirten Ausdrücke respective durch $f'_{\mathfrak{p}}, y'_{\mathfrak{q}}, f'_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ bezeichnet. Aus (39*) folgen dann die Gleichungen

(44) $df'_{\mathfrak{p}} = dF_{\mathfrak{p}} - i\,dF_{m+\mathfrak{p}}$, $dy'_{\mathfrak{q}} = dz_{\mathfrak{q}} - i\,dz_{m+\mathfrak{q}}$,

aus (40) die Gleichungen

$$(45) \qquad df'_{\mathfrak{p}} = \Sigma_{\mathfrak{q}}\, f'_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}\, dy'_{\mathfrak{q}}.$$

Es bestehen nun zwischen den eingeführten Differentialen drei Systeme von $2m$ linearen Gleichungen; vermittelst des ersten werden $dF_{\mathfrak{p}}$, $dF_{m+\mathfrak{p}}$ durch $df_{\mathfrak{p}}$, $df'_{\mathfrak{p}}$, vermittelst des zweiten $df_{\mathfrak{p}}$, $df'_{\mathfrak{p}}$ durch $dy_{\mathfrak{q}}$, $dy'_{\mathfrak{q}}$, vermittelst des dritten $dy_{\mathfrak{q}}$, $dy'_{\mathfrak{q}}$ durch $dz_{\mathfrak{q}}$, $dz_{m+\mathfrak{q}}$ ausgedrückt. Jedes dieser Systeme von linearen Gleichungen hat eine bestimmte Determinante, und es folgt aus bekannten Sätzen, dass die gesuchte Functionaldeterminante Δ dem Producte dieser drei Determinanten gleich ist. Bezeichnet man die Determinante der Gleichungen (40) mit $|f_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}|$, die Determinante der Gleichungen (45) mit $|f'_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}|$, so ist leicht zu erkennen, dass bei den erwähnten drei Systemen von $2m$ Gleichungen die Determinante des ersten und des dritten Werthe haben, die zu einander reciprok sind, dagegen die Determinante der zweiten gleich dem Producte $|f_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}| \cdot |f'_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}|$ ist. Mithin wird das Product aus den drei Determinanten gleich der zweiten Determinante, und es entsteht für die Functionaldeterminante Δ der Ausdruck

$$(46) \qquad \Delta = |f_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}| \cdot |f'_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}|.$$

Sobald in der Determinante $|f_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}|$ der reelle und

der imaginäre Theil getrennt werden, so kommt, weil die Determinante $|f'_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}|$ mit derselben conjugirt ist

$$(47) \quad |f_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}| = A + iB, \; |f'_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}| = A - iB,$$

und deshalb ist

$$(48) \qquad \Delta = A^2 + B^2.$$

Die Functionaldeterminante Δ ist also ein Aggregat von zwei Quadraten, und daher wesentlich positiv, wie auch Herr Kronecker erwähnt hat *).

Wenn die Grössen $z_1, z_2, \ldots z_{2m}$ vermöge der oben entwickelten Bedingungen eindeutige Functionen der Variabelen $F_1, F_2, \ldots F_{2m}$ sein sollen, so muss innerhalb des Gebietes G die Functionaldeterminante Δ überall dasselbe Vorzeichen behaupten. In dem vorliegenden Falle kann die Functionaldeterminante Δ niemals negativ werden, und nur dann verschwinden, wenn die reellen Bestandtheile A und B gleichzeitig gleich Null werden. In dem Gebiete G dürfen also diejenigen Werthsysteme nicht enthalten sein, in welchen dieses geschieht. Die Totalität der betreffenden Werthsysteme kann immer nur eine $(2m-2)$fache Mannigfaltigkeit bilden. Für den Fall $2m = 2$ müssen diese Werthsysteme, wie bekannt, singuläre Werthsysteme sein.

Bonn, den 6. October 1870.

*) l. c. pag. 177.

Ueber einen Balanoglossus im Nordmeere.

Von

Dr. R. v. Willemoes-Suhm.

Vorgelegt von J. Henle.

Kowalevskys schöne Untersuchungen [1]) über die Anatomie des Balanoglossus haben das Interesse der Zoologen für dieses merkwürdige Geschöpf aufs Neue erweckt. Noch grösser wurde dasselbe jedoch als Metschnikoff im vorigen Jahre der k. Societät d. W. zu Göttingen [2]) eine vorläufige Mittheilung vorlegen liess, aus der sich ergab, dass die von Joh. Müller entdeckte Tornaria, welche man bisher für eine Echinodermenlarve hielt, sich zu einem balanoglossusartigen Thier entwickelt. Der fragliche Wurm war bisher in zwei Arten bekannt, welche beide bei Neapel leben, dem B. clavigerus Delle Chiaje und dem neuerdings von Kowalevsky beschriebenen B. minutus. Es wird nun vielleicht den Fachgenossen nicht uninteressant sein zu erfahren, dass ich im Juli d. J. im Oeresund bei Hellebaek auf Seeland eine dritte Art entdeckt habe, welche den Namen B. Kupfferi [3]) führen mag. Dieser Balanoglossus lebt in dem feinen Schlamm namentlich jener Stellen, welche, in einer Tiefe von 12—16 Faden, in grössester Menge von den Schalen der Tellina islandica bedeckt werden.

1) In den Mém. de l'acad. impér. de St. Pétersbourg, VIIe série, tome X, Nr. 3.

2) Göttinger Nachrichten, 1869. Nr. 15. p. 287 und ausführlicher in v. Siebold und Kölliker, Zeitschr. f. wiss. Zoologie, Bd. XX, pg. 131.

3) Herrn Professor Kupffer zu Ehren, der mich während eines Aufenthalts in Kiel auf das Liebenswürdigste bei meinen Arbeiten unterstützte.

Dort lebt er zusammen mit Siphonostomum plumosum, Aphrodite aculeata, Chaetopterus norwegicus, Phascolosoma dentalii und den Pycnogoniden.

Nachdem ich ihn zuerst gefunden und als Balanoglossus erkannt hatte, ergab ein dreistündiges Suchen etwa 3—4 Exemplare. Er ist also nicht ganz häufig und sehr schwer intact zu erhalten, da er, in reines Seewasser eines Gefässes gelegt, fast sofort abstirbt und die Zersetzung, zumal seines Hinterleibs, reissend schnell vor sich geht. Die grössten Exemplare, welche ich leider auf diese Weise einbüsste, waren etwa 25 mm. lang und 7 mm. breit. Der Rüssel ist etwa so breit als er hoch ist, der Kragen zweimal so breit als hoch. Der Hinterleib ist verglichen mit dem der beiden neapolitanischen Arten sehr kurz und gedrungen. Von diesen unterscheidet er sich namentlich auch dadurch, dass die Leberdrüsen keine Ausstülpungen an der Oberfläche bilden und die Ringelung im vorderen Körpertheil nicht so deutlich erscheint wie bei jenen. Der Zusammenschmelzungspunkt der Bogen des Kiemengestells hat fast genau dieselbe Gestalt wie bei B. minutus und das Kiemengestell selbst zeigte mir deutlich die innere feine Lamelle, welche die den Darm umfassenden Bogen zusammenhält. Der gerade nach hinten verlaufende Darmkanal war meist mit aufgenommener Nahrung angefüllt und schimmerte durch die zarte Körperbedeckung durch. Zu seinen Seiten liegen die Geschlechtsdrüsen, welche bei meinen Thieren zwar deutlich zu erkennen waren, aber nicht tumescirten. Die Fortpflanzungszeit schien vorüber zu sein, da ich schon junge nur ca. 12 mm. lange Thiere fand, an denen sich die Verhältnisse des Rüssels und

des Kragens, wie auch der Kiemenbogen schön übersehen liessen. Im Rüssel eines solchen jungen Thiers sah ich auch jenes über der Vereinigungsstelle der Kiemenbogen liegende Organ, welches Kowalevsky für einen Nervenknoten hält.

Die angegebenen Merkmale werden genügen, um den B. Kupfferi gut von seinen neapolitanischen Vettern unterscheiden zu können. Von diesen weicht er aber auch in der Lebensweise beträchtlich ab. Nach Kowalevsky lebt nämlich B. clavigerus im reinen Sande und in einer Tiefe von mindestens zwei Faden, B. minutus in einer Tiefe von 3—4 Fuss zwischen den Wurzeln verschiedener Meerespflanzen, wogegen das von mir entdeckte Thier nur da vorzukommen scheint, wo die Bewohner der Schlammregion leben, also in einer Tiefe von 12—16 Faden. Jene neapolitanischen Balanoglossen scheinen auch weit mehr vertragen zu können als der nordische Vertreter ihrer Gattung, welcher in Gefangenschaft sofort abstirbt, während es Kowalevsky gelang, jene längere Zeit am Leben zu erhalten.

Später beabsichtige ich einige Zeichnungen und genauere Angaben über das Thier an einem andern Orte zu veröffentlichen. Leider werde ich jedoch über den feineren Bau des Thieres kaum etwas Neues bringen können, da ich, als meine darauf bezüglichen Untersuchungen kaum begonnen hatten, durch den Ausbruch des Kriegs genöthigt wurde den seeländischen Strand zu verlassen, um meiner Militairpflicht hier nachzukommen.

Indessen hoffe ich durch die Freundlichkeit eines Kopenhagener Zoologen, welcher meinen Untersuchungen beiwohnte, noch mit weiterem Material versehen zu werden.

Cassel, im October 1870.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

16. November. №. 23. 1870.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber das sogenannte Chronicon Thuringicum Viennense.

Von

G. Waitz.

In dem unlängst erschienenen ersten Bande der Geschichtsquellen der Provinz Sachsen ist von Prof. Lorenz in Wien aus einer Handschrift der kaiserlichen Bibliothek eine Chronik der Landgrafen von Thüringen bekannt gemacht, die schon öfter Gegenstand der Besprechung gewe-

sen ist[1] (von Wattenbach, Archiv der Gesellschaft X, S. 470; Hesse, Zeitschr. f. Thür. Gesch. IV, S. 433 ff.; Herrmann, Bibliotheca Erfurtina S. 59 ff.) und besonders dadurch die Aufmerksamkeit auf sich gezogen hat, dass sie eine nähere Verwandtschaft mit den Reinhardsbrunner Annalen, wie sie Wegele herausgegeben hat (Thür. Geschichtsquellen Bd. I), zeigt. Der Herausgeber kommt nach einigen Bemerkungen über die Beschaffenheit der beiden Werke zu dem Resultat, dass sie unabhängig von einander seien, ihre Uebereinstimmung auf Benutzung der alten ursprünglichen Reinhardsbrunner Annalen beruhe, die Form dieser hier reiner erhalten sei als in der grossen Compilation welche diesen Namen trägt; 'das Wiener Manuscript dürfte die, so weit bis jetzt zu sehn, verhältnissmässig ursprünglichste Gestalt der Reinhardsbrunner Annalen darbieten'[2]. Wäre diese Annahme begründet, so hätte das Chronicon eine nicht geringe Bedeutung. Aber ich vermag damit in keiner Weise übereinzustimmen. Vielmehr finde ich in dem Werke der Wiener Handschrift nur einen schlechten Auszug der Reinhardsbrunner Annalen, wie sie uns überliefert sind, mit ein paar nicht gerade bedeutenden Zusätzen. Ich glaube es genügt dafür einzelne Jahre zu vergleichen, und ich halte mich besonders an den älteren Theil, da ich Gelegenheit hatte diesen für andere Zwecke etwas genauer ins Auge zu fassen.

Lorenz findet es beachtenswerth, dass zu Anfang der Wiener Text (ich will ihn der Kürze

1) Sie bildet übrigens nur den letzten Theil einer grösseren zusammenhängenden Compilation. Unmittelbar vorher geht De origine Thuringorum.

2) Aehnlich doch vorsichtiger spricht sich derselbe aus, Geschichtsquellen S. 136 N.

wegen mit W bezeichnen) nicht das wiedergiebt was die Reinhardsbrunner Annalen (R) aus Gotfrid von Viterbo und Ekkehard haben. Aber W will, wie der Titel lautet, hier nur de ortu comitum provincialium in Thuringia handeln, befleissigt sich dabei überall möglichster Kürze, lässt also fort was mit jener Aufgabe nicht in unmittelbarem Zusammenhang steht. Er beginnt gleichwohl wie W mit K. Konrad II., und fügt das (falsche) Jahr 1015 hinzu. Später zeigt er ganz dieselbe Combination von Ekkehard mit Thüringer oder Reinhardsbrunner Aufzeichnungen wie R; benutzt auch sonst dieselben Quellen wie dieser (die Ann. Erphesphurd., das Chron. Sampetrinum).

Vergleichen wir die auf Ekkehard zurückgehenden Stellen, so zeigt sich auf den ersten Blick, dass W diese nicht unabhängig von R entlehnt hat, obschon er Ekkehard in dem frühern Theil seiner Compilation benutzte (Hermann S. 60), sondern in der Fassung von R wiederholt, sich nur noch etwas weiter von dem Original entfernt als dieser.

So

1070:

Ekk.	R.	W.
Teti marchio non sine Saxoniae principum consilio tyrannidem in partes regias orditur, quae tamen mox caelesti simul et terrena majestate compescitur, scilicet castellis suis Bichilingon et Schidingon a rege destructis, filio suo, seque	Theti marchio tyrannidem in regias partes orditur, que tamen mox a rege compescitur, scilicet castellis suis Bichelingen et Schidingen a rege destructis, filio suo a proprio servo interempto, et ipse postmodum in brevi moritur.	Theoiko marchio tyrannidem in regias partes orditur, qui tamen mox a rege compescitur, scilicet castellis suis Bichelingen et Schidingen a rege destructis, filio quoque suo a proprio servo interempto. Ipse postmodum in brevi moritur.

militari viro, a proprio servo interempto ipsoque communi morte in brevi finito.		

1089.

Ekk.	R.	W.
Post haec congregato exercitu, oppidum quoddam marchionis Eggiberti in Thuringia positum nimis firmum, Gliche dictum, obsedit. In vigilia vero natalis Domini, dominico scilicet die, cum magna pars primatum ob diem festum jam abiret, Eggibertus suis consulens, audacter imperatorem invadit et naviter primo resistentem, tandem cedere compulit.	Rex cum exercitu obsedit Glychen oppidum marchionis Eckeberti, qui in vigilia natalis Domini cum eo congressus, bello illum cedere compellit.	rex Heinricus cum exercitu obsedit Glichen castrum et oppidum marchionis Ekenberti, qui in vigilia natalis Domini cum eo congressus, bello illum cedere compellit.

Im Verlauf des letztern Jahrs (der Codex hat falsch 1079) fügt W zu Ekenbertus hinzu: fundator ecclesie sancti Georii in Nuwenborg et castri Eckardisberg, was in der Ausgabe hätte gross gedruckt sein sollen, was aber sich deutlich genug als späteren Zusatz kundgiebt.

Allerdings hat W dann 1092 einen Satz aus Ekk. (der Herausgeber hat die Quelle nicht angegeben und die Ableitung durch den Druck nicht angezeigt), der in der Ausgabe und wohl auch in der Handschrift von R fehlt. Die uns erhaltene Handschrift ist aber bekanntlich eine

sehr junge und mangelhafte. Natürlich nicht für sie, nur für das in ihr enthaltene Werk nehme ich in Anspruch was ich hier geltend mache, bin aber dabei allerdings der Meinung, dass der Autor der Wiener Chronik es im grossen und ganzen in derselben Gestalt vor sich hatte wie wir.

Ganz ebenso wie zu Ekkehard verhält sich W zu den Ann. Erphesfurdenses und dem Chron. Sampetrinum. Er kennt ihre Nachrichten nur in der Gestalt wie sie R bringt. Aus jenen hat er überhaupt nur eine Notiz S. 136: sollte der Autor deshalb ihren Codex aufgeschlagen haben? Für das Verhältnis zum Chron. Sampetr. führe ich gleich die erste Stelle an, wo es zu Grunde liegt, 1227.

S.[1]	R.	W.
Generale passagium ad terram sanctam factum est, in qua expedicione eciam imperator Fridericus transfretavit.	Generale passagium ad terram sanctam factum est, in quo etiam Fridericus Romanus (imperator) cum multa turba cruce signatorum transfretavit.	Generale passagium ad terram sanctam factum est, in quo eciam Fridericus imperator Romanorum cum multa turba cruce signatorum properavit vel transfretavit[2].

Dass W aus R entstanden, wird niemand bezweifeln der die Stellen mit einander vergleicht[3].

Dasselbe Verhältnis liegt dann auch vor in

1) Gleichlautend auch die Ann. Erph. XVI, S. 27.

2) Vgl. dazu 1170: expungnatur et capitur statt capitur; 1160 destruitur et funditus evertitur statt funditus destruitur, und so öfter.

3) Dies nimmt auch Lorenz an, wenn er sagt, Geschichtsquellen S. 136 N., bis zum J. 1260 sei das Chron. Sampetrinum diesem Codex (er meint: Werke) völlig unbekannt. Ich denke weiter, ja ganz und gar.

denjenigen Theilen um die es sich hauptsächlich handelt, bei den eigentlich Reinhardsbrunner Aufzeichnungen. Nicht dass ich glaube dass diese, wenigstens in ihrem älteren Theil, jemals getrennt von den Stellen aus Ekkehard und den Erfurter Annalen existiert haben; vielmehr sind sie gewiss diesen eingefügt, als es galt in Reinhardsbrunn ein Werk über die Geschichte des Klosters und Landes zu stande zu bringen. Aus dem Ganzen wie es vorlag hat W seine Excerpte gemacht, aber so dass er die ihm zu ausführlichen Klosternachrichten noch mehr abkürzte als anderes.

Denn in der That nur ein Auszug, ein oft mangelhafter, hie und da entstellter Auszug liegt vor.

1015 heisst es R: in Thuringia ei comicie pheudum contulit et beneficia plurima alia concessit; W lässt 'comicie' weg und nimmt dem ganzen Satz dadurch den Sinn. Vorher heisst es R: a sede Moguntina beneficia sibi subducta sunt et in alterum translatum; das ändert W: privatus est heriditario jure et paterno et in alterum translatum, was gar keinen Sinn hat, da nur von Lehen die Rede sein kann: die hereditas verliert der Graf später da er seinen Gegner getödtet. — 1035 ist zu 'militaribus viris' ein überflüssiges 'militibus seu' hinzugefügt, dagegen z. B. 1068 das charakteristische 'cuidam ingenuo' vor 'Wichmanno comiti', und nachher 'ingenuo' nach 'comiti' weggelassen. Alles was wir in diesen Jahren lesen ist nur Excerpt aus R. Dieser schreibt 1068: In partibus quoque Orientis in eis terminis in quibus fluvius Unstrot ingreditur Salam fluvium, munitissimam (so ist offenbar zu lesen) urbem cognomento Nuenborg instituit prope civitatem parvam, scilicet Fri-

borg, que etc. W kurz: Item in partibus Orientis castrum et urbem Nuenburg construxit. Das Folgende ist hier ganz misverstanden. R sagt in seinem oft etwas verschränkten Styl: Qui etiam imperialibus prediis tam acriter institit et infestis viribus indesinenter occurrit, donec ad plenam recognitionem initi federis imperatoris et comitis ipsi comiti largicione regia castrum Eckersberg stabili jure delegatum est: d. h. natürlich, der Landgraf, von dem die Rede ist, erhielt Eckersberg. Daraus macht W: comitem eciam de Eckardisberg aput imperatorem reconciliavit et ad graciam pristinam perduxit.

Ich glaube das Gesagte genügt, um die Unmöglichkeit darzuthun, dass hier irgend etwas von einem ursprünglichen Text der Reinhardsbrunner Annalen zu finden sei. Nur als Ableitung aus denselben kann das Chron. vielleicht hie und da in Betracht kommen, um den mangelhaft überlieferten Text zu verbessern. Doch zeigt es sich auch dazu wenig geeignet, da z. B. seine Namensformen modern oder verderbt sind, z. B. 1035 'Schauenberg' statt 'Soweburg'; 1130 'Kongisbrucken' statt 'Tummesbrucken'.

Ausserdem kann das Werk für die Frage nach der Entstehung der Ann. Reinhardsbr. eine gewisse Bedeutung haben. Freilich darf man sich da nicht an den Herausgeber halten, der mit dem Jahr 1259 den Text schliesst und sagt (S. 260), dass hier 'die alten Reinhardsbrunner Annalen abbrechen'. Weder das Eine noch das Andere hat einen irgendwie genügenden Grund. In dem Text von R, wie er uns in Verbindung mit dem Chron. Magdeburgicum vorliegt, tritt 1259 hier weiter kein Abschnitt hervor, als dass an dieser Stelle, wie öfter, ein Stück jenes Chronicon eingelegt ist; die Benutzung

des Chron. Sampetrinum ist vor- und nachher wesentlich ganz dieselbe. Wegele hat keinen Anlass gefunden an dieser Stelle einen Wechsel des Verfassers anzunehmen[1], und ich wüsste durchaus nichts was dazu berechtigen könnte. Denn in W dauert die Benutzung von R, wie freilich Lorenz verschweigt, anderswo aber hinreichend bezeugt wird (Herrmann S. 60), bis zum Jahre 1307 fort. Es folgen darauf andere vermischte Nachrichten; man kann auch nicht wie Lorenz (S. 198) sagen: dass das Werk mit dem Jahr 1327 in plötzlich abbrechender Weise ende: sondern es ist dies nur das letzte Jahr, das in diesen späteren ungeordneten Aufzeichnungen erwähnt wird[2]. Und es hat deshalb eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass der Verf., wie Herrmann annimmt, nicht einer viel späteren Zeit angehört: dann muss damals ein Exemplar der Reinhardsbrunner Annalen in ihrer jetzigen Gestalt, sei es bis 1307 sei es weiter fortgesetzt, ihm vorgelegen haben: sie wären also nicht, wie Wegele meint (Einleitung S. XX), in oder gar nach der Mitte des 14. Jahrhunderts in diese Gestalt gebracht. Doch das weiter zu untersuchen liegt dieser Erörterung ferne.

Sie hat es nur mit dem Verhältnis des Wiener Chronicon zu den Annalen zu thun. Hervorzuheben sind noch die Zusätze die jenes hat. Mitunter bestehen sie blos in einzelnen Worten die die Sache oder den Ausdruck verdeutlichen sollen, wie vorher schon Beispiele angeführt

1) Auch Lorenz selbst nicht, Geschichtsq. S. 133.

2) So nach den genauen Angaben bei Herrmann, während man nach Wattenbach S. 470 annehmen könnte, die Thüringische Chronik gehe in regelmässigem Fortgang der Jahre bis 1327.

wurden: militibus seu militaribus viris, castrum et opidum; ebenso 1130 seu lantgravius zu: princeps. Oder sie wollen das Erzählte etwas näher bestimmen, wie 1130 zu Winczenborg: castrum prefati comitis Hermanni; 1160: hujus nominis quarto, und: cognomento Probo. Etwas weiter geht die auch schon erwähnte Bezeichnung des Ekbert als fundator ecclesie sancti Georii in Nuwenborg et castri Eckardisberg. Ein längerer Zusatz ist zum Jahr 1062: Hii autem versus — juxta Schipplitz. Ebenso 1169: murus Erfordensis a Cristano Moguntino archiepiscopo permissu imperatoris denuo reparatur, was sich so auch nicht im Chr. Samp. findet (in den Ann. S. Petri, SS. XVI, S. 23, nur kurz zu 1168: Murus Erfordiae restauratur), und auf eine selbständige Benutzung alter Erfurter Aufzeichnungen hinweist. Hesse in seinem Abdruck der Varianten und Zusätze des Chronicon hat diese Stelle (Z. f. Thür. Gesch. IV, S. 433) übersehen; und es ist daher möglich, dass auch noch andere sich finden als er angiebt. Dies hier weiter zu verfolgen, ist meine Absicht nicht. Lorenz hätte, wenn er einmal dies Chronicon abdrucken wollte, sich wohl am meisten verdient gemacht, wenn er solche Abweichungen deutlicher, durch den Druck oder sonst, hervorgehoben hätte, als es nun durch die beigefügten Verweisungen auf Wegeles Ausgabe geschehen ist.

Sanskritischer Ablativ auf ursprüngliches *at* von Themen auf *u*.

Von

Theodor Benfey.

Ein Beispiel eines derartigen Ablativs habe ich in meiner kurzen Sanskrit-Grammatik §. 451 S. 261 gegeben, nämlich *vidyót* aus der Vâjasaneyi-Samhitâ XX, 2. Als Thema nahm ich **vidyú*, identisch mit *vidyút*, 'der Blitz', wie *didyú* neben *didyút* erscheint. Die Form *vidyót* ist aus dem Thema *vidyú* + *at* auf dieselbe Weise entstanden, wie der gewöhnliche Ablativ-Genitiv der Themen auf *u* vermittelst der Endung *as*, z. B. aus *víshnu víshnos*, d. h., wie im Nominativ-Vokativ Pluralis z. B. *víshnav-as*, Dativ Sing. z. B. *víshnav-e*, vedischem Locativ Sing. z. B. *víshnav-i* (Rigv. VIII. 3, 8) und vedischem Instrumental Sing. *bâháv-â* von *bâhú* (Rigv. II. 38, 2; V. 64, 2; VII. 62, 5 cf. Vârtt. 4 zu Pân. VII. 1. 39; doch stellt es das Petersb. Wtbch. unter das Thema *bâhâva*; ein solches, aber *bâhavá* accentuirt, erscheint im Çatapatha-Brâhmana), ist zunächst *a* vor *u* eingetreten und letzteres vor der vokalisch anlautenden Endung liquidirt, also eigentlich im gewöhnlichen Ablativ-Genitiv Sing. **víshnav-as*, im alten Ablativ **vidyav-at* entstanden, dann aber °*ava*°, wie z. B. in *maghon-as*, *maghon-os*, *maghon-âm*, *maghon-î* für **maghavan-as*, **maghavan-os*, **maghavan-âm*, **maghavan-î* vom Thema *magha-van*, zu *o* zusammengezogen, so dass die gebräuchlichen Formen *víshnos vidyót* wurden. Das auslautende *ot* in *vidyót* wird auch in den gewöhnlichen Formen des altbactrischen Ablativ Sing. regelrecht (durch *aot*) reflectirt, z. B. von *anhu* Ablativ

añhaot (welchem sskr. **asot* von *asu* entsprechen würde), von *tanu tanaot*, von *dusmainyu dusmainyaot*, von *âçu âçaot*. Zu allem Ueberfluss entscheidet endlich die Stelle, in welcher *vidyót* vorkommt, dafür, dass es als Ablativ zu nehmen; sie lautet nämlich *mrityoh pâhi* | *vidyót pâhi* 'schütze vor Tod; schütze vor Blitz.'

So unzweifelhaft demnach *vidyót* als Ablativ Sing. zu fassen, so ist es doch unangenehm, dass das Thema *vidyú*, zu welchem es gehört, bis jetzt nicht belegbar ist und es fügt sich daher sehr glücklich, dass die Taittirîya-Samhitâ in einer der Vâjas. Samh. fast ganz entsprechenden Stelle statt *vidyót* das Wort *didyót* hat, dessen Thema *didyú* neben dem gleichbedeutenden *didyút* nicht selten, auf jeden Fall eben so häufig als das letztere erscheint (s. Petersb. Wtbch. unter beiden WW.). Die Stelle findet sich I. 8. 14. 1 und lautet *mrityór mâ pâhi didyón mâ pâhi* 'schütze mich vor Tod, schütze mich vor Blitz.'

Bei dem Verhältniss der Taittirîya zu der Vâjasaneyi Samhitâ des Yajur-Veda ist es leider sehr zweifelhaft, ob wir in diesem *didyót* ein zweites Beispiel eines Ablativ Sing. eines Thema auf *u* sehen dürfen; es scheint eher eine Variante des *vidyót* in der Vâjas.-Samh. Auf jeden Fall entfernt es aber jeden denkbaren Zweifel über die einstige Bildung von Ablativen Sing. durch *at* aus Themen auf *u* im Bereiche des Sanskrit und giebt uns demnach wohl auch das Recht *vidyót*, selbst wenn es an dieser Stelle nicht ursprünglich gestanden hätte, wenigstens als ein richtiges Sanskritwort anzuerkennen.

Beiläufig bemerke ich, dass *didyót* im Petersb. Wtbch. unter *didyú* nicht aufgeführt und

auch unter andern Artikeln von mir nicht gefunden ist.

Schliesslich will ich nicht unterlassen, die Erklärung der indischen Commentare anzuführen, da es noch immer manche giebt, die in ihnen eine bedeutende Quelle für die Erkenntniss der vedischen Sprache erblicken zu dürfen glauben. Allein, wie in allen schwierigen Fällen, zeigen sie auch hier, wie wenig durch Tradition über diese erhalten war. Im Commentar zu der Vâjasaneyi Sa*m*hitâ wird zwar, dem Sinne nach richtig *vidyót* durch den Ablativ von *vidyut* nämlich *vidyutas* glossirt, und weiterhin durch *vidyutpâtât* 'Blitzschlag' erklärt, allein als ein aus dem Verbum *dyut* mit Präfix *vi* durch das Affix *vic*, das heisst ohne Affix, aber mit gu*n*a (o für u) gebildetes Nominalthema (*vidyót*) betrachtet; über den Mangel des Casuszeichens wird kein Wort verloren. Die Erklärung lautet wörtlich *vidyot vidyutâh mâm pâhi vidyotata iti vicpratyaye guna: vidyutpâtâd rakshety arthah.* — Im Commentar zu der Taittirîya Sa*m*h. wird *didyót*, trotz des Accents, als Vokativ gefasst (es müsste bekanntlich in diesem Fall den Accent auf der ersten Sylbe haben) und durch *dyotanâtmaka* 'glänzender' glossirt. Die Erklärung lautet *he didyot dyotanâtmaka.* Ueber die grammatische Form des Wortes wird nichts bemerkt.

Ueber asymptotische Linien.

Von

A. Enneper.

Auf den Flächen von negativem Krümmungsmaass existiren bekanntlich in jedem Puncte zwei Normalschnitte, deren Krümmungshalbmesser unendlich gross sind. Die Tangenten zu diesen Normalschnitten hüllen zwei Systeme von Curven ein, welche nach Dupin (Développements de géométrie. Paris 1813. pag. 190) asymptotische Linien heissen. Sind die orthogonalen Coordinaten x, y, z einer Fläche Functionen zweier Variabeln u und v, haben die Determinanten A, B, C dieselbe Bedeutung wie auf p. 336, so ist:

$$1) \qquad A(du)^2 + 2C\,du\,dv + B(dv)^2 = 0$$

die Differentialgleichung der asymptotischen Linien. Man gelangt zu derselben Differentialgleichung durch Bestimmung der Curven, deren Krümmungsebene mit der berührenden Ebene zur Fläche identisch ist. Die Normalen längs einer Curve zu einer Fläche bestimmen eine windschiefe Fläche, soll diese windschiefe Fläche zur Strictionslinie die erstere Curve haben, so ist dieselbe eine asymptotische Linie und die Normalen zur Fläche sind die Binormalen derselben. Sind a, b, c die Winkel, welche die Normale im Puncte (x, y, z) mit den Coordinatenaxen bildet, so sind die beiden vorhergehenden Sätze enthalten in den Gleichungen:

$$\cos a\, d^2x + \cos b\, d^2y + \cos c\, d^2z = 0,$$

$$d\cos a\, dx + d\cos b\, dy + d\cos c\, dz = 0.$$

Jede dieser Gleichungen führt auf die Gleichung 1), eine ist Folge der andern wegen:

$$\cos a\, dx + \cos b\, dy + \cos dz = 0.$$

Es soll von dem Fall abgesehn werden, dass die linke Seite der Gleichung 2) ein vollständiges Quadrat ist, wenn also die beiden Curvensysteme zusammenfallen, ein Umstand, welcher bei den Flächen stattfindet, die sich in der Ebene ausbreiten lassen.

Sind u und v die Argumente der asymptotischen Linien, so ist $A = 0$ und $B = 0$. Hieraus folgt:

$$2)\begin{cases} \dfrac{d^2x}{du^2} = p_1 \dfrac{dx}{du} + q_1 \dfrac{dx}{dv}, & \dfrac{d^2x}{dv^2} = p_2 \dfrac{dx}{du} + q_2 \dfrac{dx}{dv}, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{du^2} = p_1 \dfrac{dy}{du} + q_1 \dfrac{dy}{dv}, & \dfrac{d^2y}{dv^2} = p_2 \dfrac{dy}{du} + q_2 \dfrac{dy}{dv}, \\[2ex] \dfrac{d^2z}{du^2} = p_1 \dfrac{dz}{du} + q_1 \dfrac{dz}{dv}. & \dfrac{d^2z}{dv^2} = p_2 \dfrac{dz}{du} + q_2 \dfrac{dz}{dv}. \end{cases}$$

Sind E, F, G durch dieselben Gleichungen bestimmt wie auf p. 385, so hat man für p_1, q_1, p_2, q_2 folgende Gleichungen:

$$3)\begin{cases} (EG - F^2)\, p_1 = -\tfrac{1}{2} G \dfrac{dE}{du} - F\left(\dfrac{dF}{du} - \tfrac{1}{2}\dfrac{dE}{dv}\right), \\[2ex] (EG - F^2)\, q_1 = -\tfrac{1}{2} F \dfrac{dE}{du} + E\left(\dfrac{dF}{du} - \tfrac{1}{2}\dfrac{dE}{dv}\right), \\[2ex] (EG - F^2)\, p_2 = -\tfrac{1}{2} F \dfrac{dG}{dv} + G\left(\dfrac{dF}{dv} - \tfrac{1}{2}\dfrac{dG}{du}\right), \\[2ex] (EG - F^2)\, q_2 = \tfrac{1}{2} E \dfrac{dG}{dv} - E\left(\dfrac{dF}{dv} - \tfrac{1}{2}\dfrac{dG}{du}\right). \end{cases}$$

Es ist auch:

$$4)\begin{cases} 2(EG-F^2)p_1 = \dfrac{d(EG-F^1)}{du} + F\dfrac{dE}{dv} - E\dfrac{dG}{du}, \\[2ex] 2(EG-F^2)q_2 = \dfrac{d(EG-F^2)}{dv} + F\dfrac{dG}{du} - G\dfrac{dE}{dv}. \end{cases}$$

Mittelst der Gleichungen 2) und 3) lassen sich die Differentialquotienten von C nach u und v einfach darstellen. Man findet:

$$\frac{dC}{du} = 2p_1C, \quad \frac{dC}{dv} = 2q_2C,$$

d. i. nach 4):

$$5)\begin{cases} \dfrac{d}{du}\dfrac{C}{EG-F^2} = \dfrac{C}{EG-F^2}\cdot\dfrac{F\dfrac{dE}{dv} - E\dfrac{dG}{du}.}{EG-F^2} \\[3ex] \dfrac{d}{dv}\dfrac{C}{EG-F^2} = \dfrac{C}{EG-F^2}\cdot\dfrac{F\dfrac{dG}{du} - G\dfrac{dE}{dv}}{EG-F^2}. \end{cases}$$

Sind E, F, G gegeben, so lassen sich die Hauptkrümmungshalbmesser im Punkte (x, y, z) in Funktion dieser Quantitäten und ihrer Differentialquotienten nach u und v ausdrücken.

Der Winkel, unter welchem sich zwei asymptotische Linien schneiden, ist variabel, soll derselbe constant sein, so muss das Verhältniss der Hauptkrümmungshalbmesser in jedem Punkte der Fläche constant sein und umgekehrt. Verschwindet in jedem Punkte einer Fläche die

Summe der Hauptkrümmungshalbmesser, so schneiden sich die asymptotischen Linien orthogonal.

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien ist:

$$(\sqrt{E}\,du + \sqrt{G}\,dv)\,(\sqrt{E}\,du - \sqrt{G}\,dv) = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Tangente zu einer Krümmungslinie den Winkel halbirt, welchen die asymptotischen Linien einschliessen.

Ist das Product der Hauptkrümmungshalbmesser constant, so ist dieses auch mit

$$\frac{C}{EG - F^2}$$

der Fall. Die Gleichungen 5) reduciren sich dann auf:

$$E\frac{dG}{du} - F\frac{dE}{dv} = 0, \quad G\frac{dE}{dv} - F\frac{dG}{du} = 0,$$

d. i.:

$$\frac{dG}{du} = 0, \quad \frac{dE}{dv} = 0,$$

G ist also nur von v und E nur von u unabhängig. Setzt man:

$$\int\sqrt{E}\,du = u_1, \int\sqrt{G}\,dv = v_1, \frac{F}{\sqrt{EG}} = \cos t,$$

so findet nach dem Theorem von Gauss die Gleichung statt:

$$6)\qquad \frac{d^2 t}{du_1\, dv_1} + \frac{\sin t}{g^2} = 0,$$

wo g eine Constante bedeutet. Ist w eine der Coordinaten x, y, z, so genügt w den beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{du_1}\left(\frac{1}{\sin t}\frac{dw}{du_1}\right) = \frac{1}{\sin t}\frac{dt}{du_1} \cdot \frac{1}{\sin t}\frac{dw}{dv_1},$$

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\sin t}\frac{dw}{dv_1}\right) = \frac{1}{\sin t}\frac{dt}{dv_1}\,\frac{1}{\sin t}\frac{dw}{du_1}$$

Ferner finden die Gleichungen statt:

$$\left(\frac{dx}{du_1}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du_1}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du_1}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{dx}{dv_1}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv_1}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv_1}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{dx}{du_1}\frac{dx}{dv_1} + \frac{dy}{du_1}\frac{dy}{dv_1} + \frac{dz}{du_1}\frac{dz}{dv_1} = \cos t.$$

Jedem Integrale der Gleichung 6) entspricht mittelst der vorstehenden Gleichungen nur eine Fläche. So einfach auch die Gleichung 6) ihrer Form nach ist, scheint es doch nicht möglich zu sein, das allgemeine Integral herzustellen, man kann sich an besondern Beispielen davon überzeugen, dass die Bestimmung von x, y, z in Function von u_1 und v_1 auf sehr complicirte Rechnungen führt.

Für die zweiten Differentialgleichungen von x, y, z nach u und v bestehen die Gleichungen:

$$(EG - F^2)\frac{d^2x}{du\,dv} = \left(\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv} - \frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}\right)C$$

$$+\left(G\frac{dx}{du} - F\frac{dx}{dv}\right)\frac{1}{2}\frac{dE}{dv} + \left(E\frac{dx}{dv} - F\frac{dx}{du}\right)\frac{1}{2}\frac{dG}{du},$$

$$(EG - F^2)\frac{d^2y}{du\,dv} = \left(\frac{dz}{du}\frac{dx}{dv} - \frac{dz}{dv}\frac{dx}{du}\right)C$$

$$+\left(G\frac{dy}{du} - F\frac{dy}{dv}\right)\frac{1}{2}\frac{dE}{dv} + \left(E\frac{dy}{dv} - F\frac{dy}{du}\right)\frac{1}{2}\frac{dG}{du},$$

$$(EG - F^2)\frac{d^2z}{du\,dv} = \left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)C$$

$$+\left(G\frac{dz}{du} - F\frac{dz}{dv}\right)\frac{1}{2}\frac{dE}{dv} + \left(E\frac{dz}{dv} - F\frac{dz}{du}\right)\frac{1}{2}\frac{dG}{du}.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen, den Gleichungen 2) und 3) erhält man die folgenden, in denen zur Abkürzung:

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{dx}{du} = \cos\alpha,\quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{dy}{du} = \cos\beta,\quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{dz}{du} = \cos\gamma,$$

gesetzt ist:

$$7)\quad \left(\frac{d\cos\alpha}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{du}\right)^2 = \left(\frac{q_1}{E}\right)^2 (EG - F^2).$$

$$8)\quad \begin{vmatrix} \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \\ \frac{d\cos\alpha}{du}, & \frac{d\cos\beta}{du}, & \frac{d\cos\gamma}{du} \\ \frac{d^2\cos\alpha}{du^2}, & \frac{d^2\cos\beta}{du^2}, & \frac{d^2\cos\gamma}{du^2} \end{vmatrix} = \frac{q_1^2 C}{E\sqrt{E}}.$$

Bezeichnet man im Puncte (x, y, z) der asymptotischen Linien für welche u allein variirt durch ds_1 das Bogenelement, durch ϱ_1 den Krümmungshalbmesser und durch r_1 den Torsionsradius, so ist:

$$9)\begin{cases} \dfrac{ds_1}{du} = \sqrt{E} \\ \dfrac{1}{\varrho_1}\dfrac{ds_1}{du} = -\dfrac{q_1}{E}\sqrt{EG-F^2} = -\dfrac{\dfrac{d}{du}\dfrac{F}{\sqrt{E}} - \dfrac{d\sqrt{E}}{dv}}{\sqrt{EG-F^2}}\sqrt{E}, \\ \dfrac{1}{r_1} = \dfrac{C}{EG-F^2} \end{cases}$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass das Quadrat des Torsionsradius gleich ist dem negativen Product der Hauptkrümmungshalbmesser.

Ist die asymptotische Linie plan, so muss die rechte Seite der Gleichung 8) verschwinden, dann verschwindet aber auch die rechte Seite der Gleichung 7). Soll ferner die Linie für welche u allein variirt eine kürzeste Linie sein, so ist $q_1 = 0$. Aus dem Vorstehenden ergiebt sich, dass ein System asymptotischer Linien nur in einem Falle aus planen Curven oder kürzesten Linien besteht, wenn nämlich die betreffenden Curven Geraden sind. Es ist dann entweder $q_1 = 0$ oder $p_2 = 0$. Nimmt man $p_2 = 0$, so geben die Gleichungen 2) und 3):

$$q_2 = \frac{1}{2G}\frac{dG}{dv}$$

$$\frac{d^2x}{dv^2} = \frac{1}{2G}\frac{dG}{dv}\frac{dx}{dv}, \quad \frac{d^2y}{dv^2} = \frac{1}{2G}\frac{dG}{dv}\frac{dy}{dv},$$

$$\frac{d^2z}{dv^2} = \frac{1}{2G}\frac{dG}{dv}\frac{dz}{dv},$$

folglich:

$$10)\begin{cases} x = \xi + \cos X \int \sqrt{G}\, dv, \\ y = \eta + \cos Y \int \sqrt{G}\, dv, \\ z = \zeta + \cos Z \int \sqrt{G}\, dv, \end{cases}$$

wo ξ, η, ζ, $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$ nur von u abhängen. Durch die vorstehenden Gleichungen sind die windschiefen Flächen bestimmt. Ist die Strictionslinie einer windschiefen Fläche gleichzeitig asymptotische Linie, so ist die Fläche entweder eine grade Conoidfläche oder man hat die Gleichungen:

$$11)\begin{cases} x = \xi + [\cos\alpha \cos(\varepsilon + \varepsilon_0) - \cos\lambda \sin(\varepsilon + \varepsilon_0)]v, \\ y = \eta + [\cos\beta \cos(\varepsilon + \varepsilon_0) - \cos\mu \sin(\varepsilon + \varepsilon_0)]v, \\ z = \zeta + [\cos\gamma \cos(\varepsilon + \varepsilon_0) - \cos\nu \sin(\varepsilon + \varepsilon_0)]v. \end{cases}$$

In den vorstehenden Gleichungen ist (ξ, η, ζ) ein Punct einer beliebigen Raumcurve α, β, γ sind die Winkel, welche die Tangente der Curve, λ, μ, ν die Winkel, welche der Krümmungshalbmesser mit den Coordinatenaxen bildet, $d\varepsilon$ ist der Contingenzwinkel und ε_0 eine Constante.

Ist in den Gleichungen 10) $\sqrt{G}$ von u unabhängig, so kann man $\sqrt{G} = 1$ setzen. Es ergeben sich dann ähnliche Gleichungen wie die Gleichungen 11); nur dass an die Stelle des Winkels $\varepsilon + \varepsilon_0$ ein anderer näher zu definirender Winkel φ tritt.

Setzt man:

$$x = \xi + (\cos\alpha \sin\varphi + \cos\lambda \cos\varphi)\, v,$$

$$y = \eta + (\cos\beta \sin\varphi + \cos\mu \cos\varphi)\, v,$$

$$z = \zeta + (\cos\gamma \sin\varphi + \cos\nu \cos\varphi)\, v,$$

so finden die Gleichungen statt:

$$\frac{r}{k} - 1 = \left(\frac{1}{2\sin\varphi}\,\frac{dr}{ds}\right)^2,$$

$$\left(\frac{r}{k} - 1\right)\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{\varrho}\right)^2.$$

In den vorstehenden Gleichungen bezeichnet ds das Bogenelement, ϱ ist der Krümmungshalbmesser, r der Torsionsradius der Curre im Puncte (ξ, η, ζ), endlich ist k eine Constante. Als specieller Fall ist bemerkenswerth, wenn ϱ und r constante Werthe haben und $\varphi = 0$ ist, d. h. die Fläche gebildet aus den Hauptnormalen der Helix eines Kreiscylinders oder die bekannte Schraubenfläche. In Folge der Herstellung der bemerkten Gleichungen ist die Annahme $r = k$, $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\varrho}$ nicht zulässig. Wenn das Krümmungsmaass constant ist, so giebt die zweite Gleichung 9):

$$\frac{1}{\varrho_1}\,\frac{ds_1}{du} = \frac{dt}{du},$$

wo t dieselbe Bedeutung wie in 6) hat. Sind P und Q zwei Puncte einer asymptotischen Li-

nie L, so ist für Flächen von constantem Krümmungsmaass, die Differenz der Winkel, welche die Linie L in den Puncten P und Q mit den asymptotischen Curven bildet, welche durch diese Puncte gehn, gleich dem Winkel, den die Normalebene der Curve L in den Puncten P und Q einschliessen.

In Folge der letzten Gleichung 9) ist für die asymptotischen Linien der Flächen von constantem Krümmungsmaass der Torsionsradius constant. Da bisher noch wenige specielle Curven von constantem Torsionsradius bekannt sind, so sollen die Gleichungen einiger derselben hier aufgestellt werden, wobei es leicht ersichtlich ist, dass es sehr schwer sein würde, diese Resultate aus den allgemeinen Formeln für Curven von constantem Torsionsradius herzuleiten, welche Serret in der Application de l'analyse à la géomètrie p. Monge Paris 1850, auf pag. 566 gegeben hat.

Ist für eine Helikoidfläche das Product der Hauptkrümmungshalbmesser negativ constant, gleich $-g^2$, so hat man die Gleichungen:

$$x = v\cos u, \quad y = v\sin u$$

$$z = bu + \int \sqrt{\frac{v^2 g^2 - (v^2 + b^2)(v^2 + c)}{v^2 (v^2 + c)}}\, dv,$$

wo b, c Constanten sind. Zwischen u und v findet die Gleichung statt:

$$\frac{du}{dv} = \frac{b(v^2 + c) \pm g v^2}{v\sqrt{v^2 + c}\sqrt{[v^2 g^2 - (v^2 + b^2)(v^2 + c)]}}.$$

Nimmt man c positiv, $0 < k < 1$, $k^2 + k'^2 = 1$, so kann man setzen:

$$\left(\frac{b}{g}\right)^2 = \frac{1 + a^2 k^2}{(1 + a^2)^2}, \quad \frac{c}{g^2} = \frac{a^4 k'^2}{(1 + a^2)^2},$$

$$\left(\frac{v}{g}\right)^2 = \left(\frac{a k'}{1 + a^2}\right)^2 \frac{1 + a^2 k^2 \sin^2\varphi}{1 - k^2 \sin^2\varphi}.$$

Ist c negativ, so nehme man:

$$\left(\frac{b}{g}\right)^2 = \frac{a^2}{k^2} \cdot \frac{1 + a^2 k^2}{(1 + a^2)^2}, \quad \frac{c}{g^2} = -\frac{k'^2}{k^2} \frac{1}{(1 + a^2)^2}$$

$$\left(\frac{v}{g}\right)^2 = \frac{k'^2}{k^2} \frac{1}{(1 + a^2)^2} \frac{1 + a^2 k^2 \sin^2\varphi}{1 - k^2 \sin^2\varphi}.$$

In beiden Fällen ergiebt sich ein Resultat von der Form:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = h \, . \, s,$$

wo h eine Constante bedeutet und s der Bogen der Curve ist. Für den Fall einer Rotationsfläche kann man setzen:

$$\frac{x}{\cos u} = \frac{y}{\sin u} = g k k' \frac{\sin am\, u}{\Delta am\, u},$$

$$\frac{z}{g} = k^2 \frac{\sin am\, u \cos am\, u}{\Delta am\, u} + k^2 \int \sin^2 am\, u\, du.$$

Ist für eine Fläche ein System von Krümmungslinien plan und das Krümmungsmaass negativ constant, so hat man die Gleichungen:

$$\frac{x}{\cos u} = \frac{y}{\sin u},$$

$$x \cos u + y \sin u = g \frac{\sqrt{a + b \cos 2wi}}{\cos(v+w)i \,.\, \sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$z \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{g} = \int \sqrt{a - b \cos 2vi} \, dv$$

$$+ \frac{\operatorname{tang}(v+w)i}{i} \sqrt{a - b \cos 2vi},$$

$$\frac{dw}{du} = \frac{\sqrt{a - 1 + b \cos 2wi}}{\sqrt{a^2 - b^2}} (a + b \cos 2wi).$$

In den vorstehenden Gleichungen sind a, b, g Constanten und $i = \sqrt{-1}$. Für eine Curve von constantem Torsionsradius g ist:

$$\frac{a + b \cos 2wi}{\sqrt{a^2 - b^2}} du = \pm \frac{dv}{\sqrt{a - b \cos 2vi}}$$

oder auch:

$$\frac{dw}{\sqrt{a - 1 + b \cos 2wi}} = \pm \frac{dv}{\sqrt{a - b \cos 2vi}}.$$

Jede Seite dieser Gleichung ist abgesehn vom Vorzeichen gleich $\frac{ds}{g}$, wo ds das Bogenelement der in Rede stehenden Curve ist.

Ist ein System von Krümmungslinien sphärisch, schneiden die osculatorischen Kugelflächen

derselben die Fläche orthogonal, nimmt man endlich das Krümmungsmaass, der Fläche negativ constant, so hat man folgende Gleichungen:

$$\frac{x}{g} = \frac{\frac{1-k'^2V^2}{2k'}\frac{dV_1}{dV} + k'VV_1}{(1+k'^2V^2)\Delta amnu - 2k'kV\cos amnu},$$

$$\frac{y}{g} = \frac{\frac{1-k'^2V^2}{2k'}\frac{dV_2}{dV} + k'VV_2}{(1+k'^2V^2)\Delta amnu - 2k'kV\cos amnu},$$

$$\frac{z}{g} = \frac{1}{k}\int\frac{du}{\sin^2 amnu} +$$

$$\frac{1}{kn\sin amnu}\,\frac{(1+k'^2V^2)\cos amnu - 2k'kV\Delta amnu}{(1+k'^2V^2)\Delta amnu - 2k'kV\cos amnu}.$$

In den vorstehenden Gleichungen sind g und n Constanten, k, k' Modul und Complementärmodul der vorkommenden elliptischen Functionen. Die Functionen V_1 und V_2 hängen auf folgende Weise von V ab:

$$V_1^2 + V_2^2 = k'^2(1-k'^2V^2)^2$$

$$+ k'^2\frac{(2k'V)^2 - k^2(1+k'^2V^2)^2}{k^2n^2}.$$

$$\left(\frac{dV_1}{dV}\right)^2 + \left(\frac{dV_2}{dV}\right)^2 = 4k'^6V^2$$

$$+ 4k'^4\frac{1-k^2k'^2V^2}{k^2n^2}.$$

Die Function V ist durch folgende Differentialgleichung bestimmt:

$$\left(2k' \frac{dV}{dv}\right)^2 = -(1 - k'^2 V^2)$$

$$+ n^2 [(1 + k'^2 V^2)^2 - 4k^2 k'^2 V^2].$$

Für eine Curve von constantem Torsionsradius ist:

$$du \pm dv = 0.$$

Für den Fall, dass $n = 1$, kann man setzen:

$$V_1 = \frac{2k'^3}{k} V \cos kv, \quad V_2 = \frac{2k'^3}{k} V \sin kv,$$

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dv} = k'.$$

Es ist noch zu bemerken, dass in den beiden letzten Beispielen u und v die Argumente der Krümmungslinien sind. Die Herleitung der vorstehenden Resultate, welche ziemlich ausgedehnte Untersuchungen erfordert, hat der Verfasser auf die »analytisch-geometrischen Untersuchungen« begründet, welche in den Nachrichten v. d. K. G. d. W. vom Jahre 1868 sich unter Nr. V und VI befinden.

Sind u und v die Argumente der asymptotischen Linien, nimmt man E, F, G als gegeben an, so genügt jede der Coordinaten x, y, z zwei linearen partiellen Differentialgleichungen. Der Ausdruck für eine der Coordinaten kann also nur eine arbiträre Function enthalten. Die

Werthe von x, y, z müssen ferner den Gleichungen für E, F, G genügen, wodurch sich drei Gleichungen für die drei arbiträren Functionen ergeben, welche in den Ausdrücken der Coordinaten enthalten sind. Hieraus folgt, dass gegebenen Werthen von E, F, G nur ein System von Werthen von x, y, z d. h. nur eine Fläche entspricht. Bei einer Biegung einer Fläche von negativem Krümmungsmaass verlieren also die asymptotischen Linien ihren Charakter, oder auf zwei Flächen, die auf einander abwickelbar sind, können nicht beiden Systemen von asymptotischen Linien der einen Fläche auch beide Systeme von asymptotischen Linien der andern Fläche entsprechen. Es können höchstens die Curven eines Systems auf zwei Flächen, welche sich auf einander abwickeln lassen, für beide Flächen gleichzeitig asymptotische Linien sein, wie z. B. die Generatricen bei der Deformation der windschiefen Flächen. Was den Uebergang asymptotischer Linien in andere Curvensysteme bei der Biegung von Flächen betrifft, so möge hier ein kurzer Beweis des folgenden Satzes folgen:

Die asymptotischen Linien gehn durch Biegung der Fläche nur in einem Falle in Krümmungslinien über. Sollen die bemerkten Curven in Krümmungslinien übergehn, so ist $F = 0$. Es ist dann:

$$\frac{d}{du}\frac{C}{E} = 0, \quad \frac{d}{dv}\frac{C}{G} = 0,$$

oder:

$$\frac{C}{E} = F(v), \quad \frac{C}{G} = F_1(u).$$

Man kann unbeschadet der Allgemeinheit $F(v) = 1$ und $F_1(u) = 1$ setzen, so dass also:

$$C = E = G.$$

Das negative Product der Hauptkrümmungshalbmesser ist dann gleich C^2. Die von Gauss gegebene Gleichung für das Krümmungsmaass ist im vorliegenden Falle:

$$\frac{d^2 \log \frac{1}{C}}{du^2} + \frac{d^2 \log \frac{1}{C}}{dv^2} + \frac{2}{C} = 0.$$

Seien nun E und G gegeben, bezeichnet man durch S das Krümmungsmaass, durch T das Verhältniss der beiden Hauptkürmmungshalbmesser, so hat man für den Fall, dass u oder v die Argumente der Krümmungslinien sind:

$$\frac{dT}{dv} + \frac{T}{SE} \cdot \frac{dSE}{dv} - \frac{1}{E}\frac{dE}{dv} = 0,$$

$$\frac{d}{du}\frac{1}{T} + \frac{1}{TSG}\frac{dSG}{du} - \frac{1}{G}\frac{dG}{du} = 0.$$

Für den vorliegenden Fall ist nun $E = G = C$, $S = \frac{1}{G^2}$, folglich:

$$\frac{dT}{dv} \cdot C - \frac{dC}{dv} T = \frac{dC}{dv},$$

$$\frac{d}{du}\frac{1}{T} \cdot C - \frac{1}{T}\frac{dC}{du} = \frac{dC}{du}.$$

Diese Gleichungen geben:

$$T = -1 + UC, \quad \frac{1}{T} = -1 + VC,$$

also:

$$1 = (1 - UC)(1 - VC)$$

oder:

$$\frac{1}{C} = \frac{UV}{U+V},$$

wo U nur von u und V nur von v abhängt. Der vorstehende Werth kann der obigen partiellen Differentialgleichung nur dann genügen, wenn eine der Functionen U oder V constant ist. Setzt man nämlich zur Vereinfachung:

$$U = \frac{1}{p}, \quad V = \frac{1}{q},$$

also $C = p + q$, so folgt:

$$2 - p'' - q'' + \frac{p'^2 + q'^2}{p+q} = 0.$$

Differentiirt man diese Gleichung erst nach u und dann nach v, so ist:

$$p'q'\left(-p'' - q'' + \frac{p'^2 + q'^2}{p+q}\right) = 0.$$

Da der eingeklammerte Faktor nicht verschwinden kann. so ist $p'q' = 0$, also entweder

p oder q constant. Nimmt man p constant, so sind C, E, G nur von v abhängig. Wegen $F = 0$ verschwindet dann in den Gleichungen 2) die Quantität p_2, die Fläche ist also windschief. Da ferner in jedem Puncte der Fläche die Summe der Hauptkrümmungshalbmesser verschwindet, so erhält man die Schraubenfläche. Sind die Quantitäten E und G, für den Fall, dass u und v die Argumente der Krümmungslinien bedeuten, nur von v abhängig, so ist die Fläche eine Rotationsfläche, als deren Meridiancurve man ohne Schwierigkeit die Kettenlinie findet.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

September und October.

Nature, Nr. 41—53.

A. Ghirardini, Studj sulla lingua umana, sopra alcune antichi inscrizioni e sulla ortografia italiana. Milano 1869. 8.

G. L. v. Maurer, Geschichte der Städteverfassung in Deutschland. Bd. III. 1870. 8.

Abhandlungen der mathem.-physik. Classe der königl. bayer. Academie der Wissenschaften. Bd. X. Abth. 3. München 1870. 4.

Sitzungsberichte der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. 1870. I. Heft 2 3. 4. Ebd. 1870. 8.

Mémoires de l'Académie Imp. des Sciences de St. Pétersbourg. VII série. T. XV. Nr. 5—8. St. Pétersbourg 1870. 4.

Bulletin de l'Académie Imp. des Sciences de St. Pétersbourg. T. XV. Nr. 1. 2. Ebd. 1870. 4.

Archives du Musée Teyler. Vol. III. Fasc. I. Harlem 1870. gr. 8.

Archäologische Topographie der Halbinsel Taman. Moskau 1870. 4.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen auf der Sternwarte zu Prag im Jahre 1869. Jahrg. XXX. Prag 1870. 4.

Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch Indie. Deel XXXI. Aflev. 1—3. Batavia, 's Gravenhage 1869. 8.

C. K. Hoffmann und H. Weyenbergh, die Osteologie und Myologie von Sciurus vulgaris L., verglichen mit der Anatomie der Lemuriden und der Chiromys etc. Harlem 1870. 4.

W. F. R. Suringar, Algae Japonicae. Ebd. 1870. 4.

Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles. T. V. Livr. 1. 2. 3. La Haye 1870. 8.

Programma van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem voor het Jaar 1869. 70.

L. Cremona, sugli integrali a differenziale algebrico. Bologna 1871. gr. 8.

Compte-Rendu de la Commission Imp. Archéologique pour l'année 1868. Avec un Atlas. St.-Pétersbourg 1869. 4.

C. F. v. Stälin, Wirtembergische Geschichte. Th. IV. Abth. I. Stuttgart 1870. 8.

John Beddoe, Address to the Anthropological Society of London. London 1870. 8.

Acta Universitatis Lundensis. 1868. Heft 1. 2. 3. Lund 1868—69. 4.

Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft. Bd. 24. Heft 3. Leipzig 1870. 8.

Nederlandsch Kruidkundig Archief, on der Redactie van W. F. R. Suringar, en M. J. Cop. Vijfde Deel. Vierde Stuk. Leeuwarden 1870. 8.

Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften, redigirt von C. Giebel und M. Siewert. Neue Folge 1870. Bd. I. Berlin 1870. 8.

Oversigt over det kong. danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbeider i. Aaret 1868. 69. 70. Nr. 1. 4. 6. Kjöbenhavn. 8.

M. Hörnes, die fossilen Mollusken des Tertiaer Beckens von Wien (herausg. von der k. k. geol. Reichsanstalt. Bd. II. Nr. 9. 10). Wien 1870. 4.

Flora Batavia. 211. 212. Aflevering. Leyden. 4.

Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles. Bogen 6. 7. 8. 1870.

Résumé des observations sur la météorologie et sur la physique du globe. 1869.
Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Jahrg. V. Heft 3. Leipzig 1870. 8.
Der Zoologische Garten. Jahrg. XI. 1870. Nr. 1—6. Frankfurt a. M. 1870. 8.
55. Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft in Emden 1869. Emden 1870. 8.
Zur Philologenversammlung in Leipzig. 6—8. September 1870. Gruss an die Herbartianer von einem Dupirten. Hamburg. 8.
Felice Finzi, Il Brahui, studio di Etnologia linguistica. Firenze 1870. 8.
John Tyndall, on the action of rays of high refrangibility upon gaseous matter. 4.
Bidrag till Kännedom af Finlands natur och folk. Heft XV och XVI. Helsingfors 1870. 8.
Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar. XII. 1869—70. Ebd. 1870. 8.
A. v. Oettingen, Meteorologische Beobachtungen angestellt in Dorpat im Jahre 1869. Jahrg. III. Dorpat 1870. 8.
Monatsbericht der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Juli 1870. Berlin 1870. 8.

(Fortsetzung folgt).

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

23. November. № 24. 1870.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Beobachtungen im magnetischen Observatorium aus dem Jahre 1869

insbesondere

Bestimmung der Siemens'schen Widerstandseinheit nach absolutem Maasse;

von **F. Kohlrausch.**

Die allgemeine Annahme einer galvanischen Widerstandseinheit wird durch ihre Einführung in die Telegraphie entschieden sein, und dass hier die Siemens'sche Quecksilbereinheit das Feld behaupten wird, erscheint kaum zweifelhaft. In der wissenschaftlichen Galvanometrie ist die mit den Siemens'schen Widerstandsscalen entstandene Wohlthat eines allgemein verständlichen und zugänglichen Widerstandsmaasses durch die vielfache Benutzung dieser Apparate hinreichend anerkannt, und das Urtheil über ihre vortreffliche Einrichtung scheint übereinstimmend günstig zu sein. Somit dürfte diejenige Entwickelung der Widerstandsfrage wirklich eintreten, welche schon gelegentlich der Anregung dieser Frage seitens der British Association von bedeutenden

Physikern als wünschenswerth bezeichnet wurde. Für die Physik aber besteht in Folge dessen das dringende Bedürfniss, mit möglichster Genauigkeit das Verhältniss der Siemens'schen zu der Weber'schen absoluten Einheit, in welcher jene bekanntlich durch Zufall nahe gleich $\frac{\text{Erdquadrant}}{\text{Secunde}}$ ist, festzustellen.

Wir verdanken Herrn Weber vier Methoden der absoluten Widerstandsbestimmung[1]) nach dem Ohm'schen Gesetze, gemäss welchem der Widerstand eines Leiters gleich dem Verhältniss einer elektromotorischen Kraft zu der Stromstärke ist, welche jene Kraft in dem Leiter erzeugt; beide Grössen in absolutem Gauss-Weber'schen Maasse gemessen. Drei von diesen Methoden hat Herr Weber selbst gebraucht, die vierte ist bei der von der British Association veranstalteten praktischen Herstellung der absoluten Einheit zur Anwendung gebracht worden.

Die erste Methode benutzt die durch den Erdmagnetismus in einem bewegten Leiter von gegebenen Dimensionen inducirte elektromotorische Kraft und findet die Stromstärke durch die Ausschläge einer kleinen Magnetnadel von bekannter Schwingungsdauer, welche sich innerhalb eines Multiplicators von genau gegebenen Dimensionen befindet.

Bei dem zweiten Verfahren kommt nur ein Multiplicator zur Anwendung, in dessen Mitte eine grössere Magnetnadel schwingt. Ist deren Schwingungsdauer und durch Ablenkungsbeobachtungen an einer Bussole das Verhältniss des Na-

1) Abh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. 1846 Band 1, S. 226. 232; Abh. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1862 Band 10 S. 12. 20.

delmagnetismus zum Erdmagnetismus und die Vertheilung des ersteren ermittelt, so lässt sich hieraus sowie aus den Dimensionen des Multiplicators die durch die bewegte Nadel in dem letzteren erzeugte elektromotorische Kraft berechnen. Die Stärke des hierdurch inducirten Stromes wird aus der beobachteten Dämpfung der Nadel erhalten.

Die dritte Methode verlangt die Kenntniss der Windungsfläche eines Erdinductors und der absoluten Intensität des Erdmagnetismus. Als Galvanometer dient eine astatische Nadel in einem sie eng umgebenden Multiplicator, und es muss das Trägheitsmoment, die Schwingungsdauer, der Ausschlag und die Dämpfung der Nadel beobachtet werden; die letztere, um aus ihr die Wirkung eines Stromes im Multiplicator auf die Nadel zu ermitteln, die sich hier nicht aus der Gestalt berechnen lässt.

Das letzte Verfahren endlich setzt einen Multiplicator von bekannten Dimensionen in rasche gleichförmige Rotation und beobachtet die Ablenkung einer innerhalb desselben aufgehangenen Magnetnadel.

Nach der ersten und zweiten Methode hat Herr Weber früher, nach der dritten in neuerer Zeit absolute Widerstände bestimmt; die letzte ist von der Standard-Commission der British Association zur Anwendung gebracht worden. In den oben gesperrt gedruckten Theilen der Ausführung sind die jeder Methode eigenthümlichen Schwierigkeiten angedeutet, es ist aber hier bezüglich der vierten noch ein Punct nachzutragen. Diese nämlich hat zwei Modificationen: entweder wird der Inductor um eine horizontale oder er wird um eine verticale Axe gedreht, und in jedem Falle tritt zu der Herstellung der con-

stanten grossen Drehungsgeschwindigkeit eine zweite Schwierigkeit. Im ersteren Falle muss an dem Beobachtungsorte das Verhältniss der horizontalen zur verticalen Componente des Erdmagnetismus ermittelt werden, im anderen tritt eine störende Induction von Strömen durch den Magnetismus der Nadel ein, die künstlich eliminirt werden muss.

Den letztgenannten Weg der Rotation des Inductors um eine verticale Axe hat die Commission der British Association eingeschlagen, wodurch die Messungen in so fern eine erhöhte Einfachheit und Genauigkeit erhalten haben, als das Verfahren von jeder Kenntniss des Erdmagnetismus unabhängig ist. Dafür aber treten die anderen Uebelstände sehr empfindlich hervor. Da hier die Frage entsteht, ob und in wie weit die von der British Association veranlasste Herstellung der Weber'schen $\frac{\text{Erdquadrant}}{\text{Secunde}}$ eine Lösung dieser Aufgabe gewesen ist, wird es nöthig sein dieselbe näher zu beleuchten.

Um durch eine Correctionsrechnung die durch die Magnetnadel inducirten Ströme eliminiren zu können, hatte diese einen so schwachen Magnetismus, wie er wohl niemals bei ähnlichen Untersuchungen vorgekommen ist. Der Magnet bestand nämlich aus einer Stahlkugel von fast 8 Mm. Durchmesser, also einer Masse von ungefähr 2 Gr.; und diese geringe Masse von ungünstigster Gestalt wurde nicht bis zur Sättigung magnetisirt. In der That lässt sich aus den (1863. S. 172)[1]) gegebenen Zahlen ersehen,

1) Die Citate beziehen sich, wo nichts anderes bemerkt ist, auf die Jahrgänge 1863 und 1864 der Reports of the Brit. Assoc.

dass der Magnetismus geringer war als derjenige, den man einer Nähnadel von 0,1 Gr. Gewicht mittheilen kann. So erklärt es sich, dass bei einem einzelnen Coconfaden eine Länge von 8 Fuss nöthig war, um die Torsion auf ein schickliches Maass zu verringern. Mit dem winzigen Magnet war an einem Metalldraht von etwa $^1/_4$ Meter Länge ein Spiegel von etwa 30 Mm. Durchmesser verbunden, der also für Luftströmungen eine Fläche von 14 Quadrat-Centimeter darbot. Dass das Trägheitsmoment dieser Theile nicht gering gewesen ist, ergiebt sich aus der Schwingungsdauer von über 7 Secunden, während die des Magnetes allein etwa $1^1/_2$ Secunden betragen haben würde.

Da in den Berichten der Brit. Assoc. nur Mittelzahlen aus vielen Beobachtungen angegeben werden, so fehlen die Anhaltspuncte zur Beurtheilung der Unregelmässigkeiten, welche etwa dem schwachen Magnetismus der Nadel zuzuschreiben sind. Aber selbst diese Resultate zeigen grosse Unterschiede. So weichen die durch Ausschläge in entgegengesetzter Richtung gefundenen Widerstände bis zu 8,5 Procent von einander ab (1864. S. 350; Pogg. Ann. Bd. 126 S. 386), was einem Unterschiede der Ausschläge nach rechts und links von 20 bis 30 Scalentheilen gleich kommt. Die von Herrn Jenkin gemachte Andeutung (Pogg. Ann. 126. S. 387), dass der Unterschied von einem einseitigen Einfluss des Fadens herrühre, ist unverständlich, denn eine Torsion des Fadens von einem so bedeutenden Einflusse kann nicht vorhanden gewesen sein. In den paarweise genommenen Mitteln reduciren sich die Unterschiede auf 1,4 Procent, verlangen aber immerhin noch Einstellungs- oder Ablesungsfehler von mehreren Scalentheilen zu

ihrer Erklärung. Wenn also solche Unregelmässigkeiten sich in Mittelwerthen aus halbstündigen Beobachtungsreihen zeigen, aus denen besonders fehlerhafte Zahlen bereits ausgeschieden worden sind (1863 S. 174), wenn ferner die gleichförmige Rotation nichts zu wünschen übrig liess (1863 S. 120), so müssen erhebliche unbekannte Fehlerquellen vorhanden gewesen sein, und es ist nicht unwahrscheinlich, dass der schwache Magnetismus und vielleicht die Kugelgestalt des Magnetes zu diesen gehört. Dass unter diesen Fehlerquellen nicht auch solche von constantem Einfluss sein könnten, lässt sich nicht von vornherein behaupten.

Es ist nun aber ein ferneres Bedenken hervorzuheben. Während die Versuche im Allgemeinen von einer grossen Umsicht zeugen, und die Theorie der Correctionen mit einer Vollständigkeit und Eleganz gegeben ist, die als Vorbild gelten kann, ist eines Punctes nirgends Erwähnung geschehen. Das Stativ, in welchem der Inductor rotirte, bestand aus »starken Messingrahmen«, welche, wie aus der Zeichnung (1863 S. 164.) folgt, geschlossene Kreise bildeten. Es wird nirgends gesagt, dass und wie man sich von der Unerheblichkeit der in diesen festen Theilen durch den rotirenden geschlossenen Inductor erzeugten Ströme überzeugt hat. Wirklich würde der Nachweis auf experimentellem Wege nicht wohl möglich gewesen sein; aber eben aus diesem Grunde erregt die Nachbarschaft der Metallmassen Bedenken.

Ich erwähne endlich einen von W. Siemens erhobenen Einwand gegen das Verfahren, aus der Länge des Drahtes den mittleren Halbmesser der Windungen abzuleiten (Pogg. Ann. 127 S. 333). Ich habe mich überzeugt, dass dieses

Verfahren bei dicken Drähten von 4 bis 5 □Mm. Querschnitt ganz exact ist, wage aber bei dem hier in Frage kommenden Draht von etwa 1 □Mm. kein Urtheil auszusprechen.

Aus der Zusammenstellung der einzelnen Resultate (Rep. 1864. S. 350, Pogg. Ann. 126 S. 386) leitet die Commission einen wahrscheinlichen Fehler des Endmittels von 0,08 Procent ab. Bei den grossen Schwierigkeiten der Messung verdient die Geschicklichkeit, Mühe und Sorgfalt, mit welcher ein so geringes Maass des aus zufälligen Ursachen entspringenden Fehlers erzielt wurde, die grösste Anerkennung; allein als wahrscheinlichen Fehler der aus den Messungen abgeleiteten absoluten Einheit werden die Physiker diese Zahl nicht annehmen, so lange nicht die Abwesenheit constanter Fehlerquellen nachgewiesen ist. Vielleicht könnte dazu eine ausführlichere Veröffentlichung des Beobachtungsmateriales beitragen, welche übrigens auch aus anderen Gründen bei einer solchen fundamentalen Bestimmung und bei dem classischen Werth, den die vorliegende Arbeit der Commission schon durch die an die absolute Widerstandsmessung angeschlossenen theoretischen und praktischen Untersuchungen immer behalten wird, dringend zu wünschen ist.

Ebenso will ich nun die oben unter Nr. 3 angeführte Methode, welche die im Folgenden mitzutheilenden Resultate geliefert hat, von Seiten ihrer Schwierigkeiten zu beurtheilen suchen. Dass deren nicht unbedeutende in ihr enthalten sind, muss zugegeben werden. Eine quantitative Schätzung das daraus resultirenden Fehlers, die schon wegen der über die Genauigkeit absoluter

Widerstandsbestimmungen herrschenden sehr abweichenden Ansichten[1]) nicht überflüssig ist, ergibt sich aus Folgenden.

Der absolute Widerstand wird aus den Beobachtungen, wenn man von Correctionsgliedern absieht, deren Ermittelung bis auf einen praktisch gleichgültigen Fehler möglich ist, nach der Formel berechnet (Abhandl. Band 10, S. 57)

$$w = \frac{8S^2 T^2 t \,.\, \text{log.nat.} \frac{a}{b}}{K\left(a\sqrt{\frac{a}{b}} + b\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}.$$

Ich nehme an, von diesen einzelnen Grössen seien bestimmt worden bis auf einen in Theilen der ganzen Grösse ausgedrückten Fehler

die Windungsfläche des Inductors S	bis	auf	$\frac{1}{2000}$
die Intensität des Erdmagnetismus T	„	„	$\frac{1}{1000}$
die Schwingungsdauer t	„	„	$\frac{1}{3000}$
das Trägheitsmoment K	„	„	$\frac{1}{750}$

und die beiden durch die Zurückwerfungsmethode erhaltenen Scalenausschläge, denen die Winkel a und b proportional sind, mögen bis auf je 0,2 Mm. genau bestimmt sein, während ihre absolute Grösse bei unseren Versuchen 370 resp. 225 Mm. betrug. Dann würde der Fehler des Resultates aus einer einmaligen Bestimmung, wenn sich alle einzelnen in ungünstigster Weise addirten, $^2/_3$ Procent betragen. Nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung jedoch würde

1) Vgl. Pogg. Ann. Bd. 113, S. 310. 311.

der Fehler von $^1/_3$ Procent zu befürchten sein. In der That glaube ich aus der mehrfachen Wiederholung aller einzelnen Bestimmungen, nach den überall angewandten Controlen und nach der Güte der Instrumente in dem Endresultat einen Fehler von höchstens $^1/_3$ Procent erwarten zu dürfen. Ich muss dieses mögliche Maximum betonen, weil nach meinen Resultaten die British Association Einheit um fast 2 Procent zu gross ist.

Ein sehr grosser Theil obigen Fehlers entsteht aus der Unsicherheit in der Intensität des Erdmagnetismus. Es folgt hieraus, dass eine erfolgreiche absolute Widerstandsbestimmung nach dieser Methode nur mit den besten Hülfsmitteln zur Intensitätsmessung ausführbar ist, wie sie in der That das hiesige Observatorium seit seiner neuen Ausstattung [1]) besitzt. Wo diess nicht der Fall ist, dürfte eine andere, insbesondere z. B. die erste Methode genauere Resultate versprechen.

Bezüglich der wirklichen Ausführung der Messungen sollen hier nur einige Puncte angedeutet werden, welche zur Beurtheilung der Genauigkeit dienen.

Siemens'sche Etalons lagen in zwei Exemplaren zu je 4 Einheiten vor, die Herr Dr. Siemens auf mein Ansuchen zum Zwecke dieser Bestimmung eigens anfertigen liess. Auf nahezu denselben Betrag von 4 Einheiten wurde die Kette (Inductor und Galvanometer) gebracht, deren absoluter Widerstand bestimmt wurde. Vor und nach jeder absoluten Bestimmung wurde letztere mit den Siemens'schen Etalons verglichen.

Besondere Sorgfalt wurde auf die Messung

1) Diese Nachrichten 1868 S. 160.

der erdmagnetischen Intensität verwandt. Eine zweimalige Bestimmung derselben während der Zeit der definitiven Beobachtungen (6 Tage) ergab nach der Reduction auf denselben Stand der Variations-Instrumente (Bifilar und Hülfsnadel) bis auf weniger als 0,02 Procent übereinstimmende Werthe. Die Beobachtung der Variationen während der Intensitätsmessung sowie während der Widerstandsbestimmungen übernahm Herr Riecke.

Die Zeiten wurden auf die Uhr der Sternwarte, die Massen auf einen Fortinschen Gewichtsatz, die Längen auf das Platinmeter der Modell- und Maschinenkammer bezogen. Die zur Beobachtung kommenden Theilstriche der Papierscalen wurden später einzeln mit dem Comparator gemessen.

Die Vergleichung der Widerstände geschah durch einfache Stromverzweigung in einem doppelt gewickelten Multiplicator, aber nicht, wie das bisher bei dieser Methode oder der Anwendung der Brücke immer geschehen ist, mit hydroelektrischen sondern mit kurz dauernden durch den Weber'schen Magneto-Inductor inducirten Strömen. Die Anwendung der schwachen Inductionsströme sicherte vor jeder erwärmenden Wirkung und das Alterniren der Stromrichtung bei der Multiplicationsmethode eliminirt ohne Weiteres eine etwa vorhandene thermoelektromotorische Kraft. Zur Interpolation wegen der nicht vollkommenen Gleichheit der zu vergleichenden Widerstände genügte die Einschaltung eines Zehntels Siemens. Es scheint mir unzweifelhaft, dass eine solche Combination inducirter Ströme mit den speciell zur Widerstandsvergleichung bestimmten Methoden die grössten Vortheile sowohl nach der Bequemlichkeit wie nach der Ge-

nauigkeit bietet. Als einen Beweis von der letzteren sowie von der feinen Justirung der Siemens'schen Etalons führe ich an, dass die beiden letzteren nach der auf ihnen angegebenen Normaltemperatur das Verhältniss 1,00044 haben sollten. Aus den Vergleichungen mit dritten Widerständen fand ich diess Verhältniss gleich 1,00050, 1,00046 und 1,00055.

Das Resultat der Beobachtungen besteht in drei Bestimmungen der Siemens'schen Einheit nach absolutem Maasse. Es wurde gefunden

$$1 \text{ Siemens} = 0{,}9705 \frac{\text{Erdquadrant}}{\text{Secunde}}$$

$$\text{„} \quad 0{,}9698 \quad \text{„}$$

$$\text{„} \quad 0{,}9713 \quad \text{„}$$

so dass im Mittel die Siemens'sche Einheit gleich $0{,}9705 \frac{\text{Erdquadrant}}{\text{Secunde}}$ oder gleich $9705000000 \frac{\text{Mm.}}{\text{Sec.}}$ ist.

Herr Hermann Siemens hatte die Güte, die Siemens'sche mit der British Association Einheit (den Exemplaren von Herrn Weber und Herrn Dr. Brix) zu vergleichen, wobei sich ergab

$$1 \text{ B. A. Einheit} = 1{,}0493 \text{ Siemens,}$$

welcher Werth nach den erforderlichen Reductionen so gut wie genau mit dem von Jenkin (Pogg. Ann. Bd. 126 S. 382) gefundenen übereinstimmt, so dass also

$$1 \text{ B. A. Einheit} = 1{,}0184 \frac{\text{Erdquadrant}}{\text{Secunde}} \text{ ist.}$$

Wie es für die praktische Widerstandsmessung wichtig ist, die Siemens'sche Einheit in abso-

lutem Maasse auszudrücken, so besteht ein wesentliches Bedürfniss der Strommessung in einer genauen Kenntniss der von Herrn Weber als „elektrochemisches Aequivalent des Wassers" eingeführten Constante, welche absolute Strommessungen mit dem Voltameter gestattet, die aber bis jetzt nur auf etwa 1 Procent genau bekannt ist. Diese Bestimmung wurde ebenfalls unternommen und durchgeführt, aber leider ist die mühsame Arbeit ohne Resultat geblieben wegen eines durch Messingschrauben veranlassten Localeinflusses des Dämpfers in der Tangentenbussole, der zu spät bemerkt wurde und zu bedeutend war um ihn nachträglich zu eliminiren.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

7. December. №. 25. 1870.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber zwei Eliminationsprobleme aus der Theorie der Curven, welche gegebenen Bedingungen genügen.

Von

A. Brill in Darmstadt.

Vorgelegt von A. Clebsch.

I.

Die Aufgabe, die Anzahl derjenigen Curven eines Büschels zu bestimmen, welche eine gegebene Curve an einer Stelle r punctig berühren, führt auf ein algebraisches Problem, bei dessen Lösung man sich mit Vortheil eines gewissen Reciprocitätsprincips, einer Ausdehnung des Princips der Dualität zwischen Linien- und Punctcoordinaten, bedient. Ich beginne mit der Aufstellung desselben.

§. 1.

$f(x_1\,x_2\,x_3) = 0$ oder kürzer $f(x) = 0$ sei die Gleichung einer Curve m. Ordnung in homogenen Coordinaten, p das Geschlecht, d die Zahl

der Doppelpuncte, unter welchen sich auch Rückkehrpuncte befinden können.

$$\varphi^{(0)}(x) = 0 \quad \varphi^{(1)}(x) = 0 \,\ldots\ldots\, \varphi^{(r)}(x) = 0$$

seien die Gleichungen von $r + 1$ Curven s. Ordnung, welche σ einfache und τ Doppelpuncte auf $f = 0$ gemeinsam haben mögen.

Sind ferner:

$$x_1 = x + \Delta x; \quad x_2 = x + 2\Delta x + \Delta^2 x;$$

$$\ldots\ldots x_k = x + k\,.\,\Delta x + \ldots\ldots + \Delta^k x$$

der Reihe nach k dem Puncte x unendlich benachbarte Puncte auf der Curve $f = 0$, so sollen die mit diesen Argumenten geschriebenen Ausdrücke f und φ resp. durch:

$$f_1, \; f^2, \; \ldots\ldots f_k \text{ und}$$

$$\varphi_1, \; \varphi_2, \; \ldots\ldots \varphi_k$$

bezeichnet werden. Die $3k$ Grössen Δx_1, Δx_2, ... $\Delta^k x_3$ bestimmen sich aus den Gleichungen:

1) $\qquad f_1 = 0 \quad f_2 = 0 \,\ldots\ldots\, f_k = 0$

(welche in der Folge immer als erfüllt angesehen werden) in Verbindung mit einer beliebig angenommenen linearen homogenen Relation zwischen Δx_1, Δx_2, Δx_3.

Definirt man nun ein System von $(r+1)^2$ Functionen Φ durch die Gleichungen:

$$
2)\left\{\begin{array}{lll}
\Sigma\varphi_1^{(i)}\,\Phi_0^{(i)}=0 & \Sigma\varphi_2^{(i)}\,\Phi_1^{(i)}=0 \ldots & \Sigma\varphi_{r+1}^{(i)}\,\Phi_r^{(i)}=0 \\
\Sigma\varphi_2^{(i)}\,\Phi_0^{(i)}=0 & \Sigma\varphi_3^{(i)}\,\Phi_1^{(i)}=0 \ldots & \Sigma\varphi_{r+2}^{(i)}\,\Phi_r^{(i)}=0 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\Sigma\varphi_r^{(i)}\Phi_0^{(i)}=0 & \Sigma\varphi_{r+1}^{(i)}\Phi_1^{(i)}=0 \ldots & \Sigma\varphi_{2r+1}^{(i)}\,\Phi_r^{(i)}=0
\end{array}\right.
$$

wo sich die Summenzeichen auf den Index $i=0, 1, \ldots r$ erstrecken, so besteht zwischen den φ und Φ eine Reciprocität, welche derjenigen der Elemente einer Determinante mit den Elementen der adjungirten sehr ähnlich ist. Es verhalten sich nämlich die k. Unterdeterminanten, ($k = 1, 2, \ldots r$), welche aus den k letzten Horiontalreihen der Determinante:

$$
3)\qquad \begin{vmatrix}
\varphi^{(0)} & \varphi_1^{(0)} & \ldots\ldots & \varphi_r^{(0)} \\
\varphi_0^{(1)} & \varphi_1^{(1)} & \ldots\ldots & \varphi_r^{(1)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\varphi_0^{(r)} & \varphi_1^{(r)} & \ldots\ldots & \varphi_r^{(r)}
\end{vmatrix}
$$

gebildet werden können, wie die $(r+1-k)$. Unterdeterminanten der $r+1-k$ ersten Reihen der 3) analog gebildeten Determinante in den Φ. Bezeichnet man mit N_k die Zahl derjenigen Schnittpuncte von $f=0$ mit irgend einer linearen Function jener k Unterdeterminanten der

Determinante 3), welche mit den Coefficienten derselben veränderlich (»beweglich«) sind, mit M_k die Zahl der beweglichen Schnittpuncte von $f = 0$ mit einer linearen Function der Unterdeterminanten der der Determinante 3) analog gebildeten Determinante der Φ, so ist also $N_k = M_{r+1-k}$, und man hat im Allgemeinen $N_1 = M_k = ms - \sigma - 2\iota = M$.

Wenn für einen Punct x auf der Curve $f = 0$ die Determinante 3) verschwindet, so ist dies gleichbedeutend mit dem Bestehn der folgenden Gleichungen:

$$4)\ \Phi^{(i)}(x) = \varrho \,.\, \Phi^{(i)}(x + \Delta x),\ (i = 0,\ 1,\ \ldots\ r)$$

α_r sei die Zahl der Puncte, für welche dies stattfindet. In gleicher Weise mögen für β_r Puncte von $f = 0$ die Gleichungen erfüllt werden:

$$4a)\ \varphi^{(i)}(x) = \varrho \,.\, \varphi^{(i)}(x + \Delta x),\ (i = 0,\ 1,\ \ldots r)$$

für welche Puncte alsdann immer eine der Determinante 3) analog gebildete Determinante der Φ verschwindet.

Die Gleichungen 4) bestehen im Allgemeinen nur für Rückkehrpuncte von $f = 0$, durch welche nicht alle Curven φ hindurchgehn. β sei die Zahl dieser Puncte. Es möge vorbehalten bleiben, $\beta_r = \beta$ zu setzen. Zwischen den Zahlen:

$$M\ N\ \alpha\ \beta$$

$$N\ M\ \beta\ \alpha$$

findet in dieser Weise ein gegenseitiger Entsprechen statt. Jede Formel, welche sich auf gemeinsame Lösungen von $f = 0$ mit einem System von Determinanten der φ bezieht, lässt sich für das supplementäre der Φ deuten. Die Hinzunahme der Zahlen α und β ist dabei wesentlich, weil im Allgemeinen nicht gleichzeitig Beide gleich Null sind.

§. 2.

α_r repräsentirt die Zahl der die Curve $f = 0$ $r$punctig berührenden Curven des Büschels $\varphi^{(0)} \ldots \varphi^{(r)}$. Für $r = 1$ ist diese Zahl gleich der Zahl der Lösungen von $f(x) = 0$ mit:

$$\begin{vmatrix} \varphi^{(0)}(x) & \varphi^{(1)}(x) \\ \varphi^{(0)}(x + \Delta x) & \varphi^{(1)}(x + \Delta x) \end{vmatrix} = 0.$$

Diese letzte Determinante kann man nach Einsetzung der Δx in die Form der Jacobi'schen Determinante von f, $\varphi^{(0)}$, $\varphi^{(1)}$ bringen. Die Zahl der beweglichen Schnittpuncte von $f = 0$ mit dieser lässt sich mit Hülfe bekannter Sätze bestimmen:

$$\alpha_1 = 2(M_1 + p - 1) - \beta.$$

Man beweist nun, dass die allgemeine Formel für α_r die folgende ist:

$$5) \quad \alpha_r = (r + 1)\,(M_r + (p - 1)\,r) - r\beta_r,$$

indem man dieselbe für den Fall $(r-1)$ als bewiesen ansieht und die Giltigkeit für r zeigt. Da für $r=1$ die Formel 5) besteht, so gilt dieselbe alsdann allgemein.

α_{r-1} giebt die Zahl der gemeinsamen Lösungen von $f=0$ mit der gleich Null gesetzten Determinante 3), wenn man darin die lezte Horizontal- und Verticalreihe weg lässt. Erweitert man dieselbe dann wieder durch Hinzunahme einer Verticalreihe, welche die φ_r wiederum enthält, und einer Horizontalreihe aus den Constanten $a^{(0)} \ldots . a^{(r)}$, so verändert sich die Zahl der gemeinsamen Lösungen in keiner Weise, wenn die Function φ_r die gemeinsamen Eigenschaften der übrigen φ theilt. Andererseits ist nunmehr aber die Zahl der gemeinsamen Lösungen zu bezeichnen mit N_r, und statt M_{r-1}, β_{r-1} in der Formel für α_{r-1} zu setzen M_r, β_r. Man erhält so die Gleichung:

$$5a)\; N_r = r(M_r + (p-1)(r-1)) - (r-1)\beta_r,$$

zugleich aber, wegen des Dualismus:

$$5b)\; M_r = r(N_r + (p-1)(r-1)) - (r-1)\alpha_r.$$

Durch Elimination von N_r aus beiden Gleichungen erhält man die zu beweisende Formel 5).

§. 3.

Es ist von Interesse zu bemerken, dass alle Formeln der oben 5) aufgestellten Art, welche sich auf gemeinsame Lösungen von $f=0$ mit einem System von Determinanten der φ bezie-

hen, zugleich eine Deutung im Sinne der Geometrie linearer Gebilde in einem Raume von r Dimensionen zulassen.

Entspricht nämlich ein solches Gebilde eindeutig der ebenen Curve $f = 0$, so lässt sich dasselbe definiren durch die folgenden Gleichungen für die Coordinaten (y) desselben:

$$6) \qquad \varrho \cdot y_i = \varphi^{(i)}, \quad (i = 0, 1, \ldots r)$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfactor bedeutet. Zugleich besteht natürlich die Gleichung $f(x) = 0$. (Vgl. Clebsch und Gordan, Abelsche Functionen, 3. Abschnitt). Man kann ein solches Gebilde auch durch die Gleichungen:

$$\varrho \cdot v_i = \Phi^{(i)}(x), \; i = 0, 1, \ldots r, \; f(x) = 0$$

darstellen, wenn man dasselbe auffasst als umhüllt von einer »ebenen« Mannigfaltigkeit von $r - 1$ Dimensionen (für $r = 2$ eine Gerade, für $r = 3$ eine Ebene). Für $r = 3$ repräsentiren obige Gleichungen eine Raumcurve, für $r = 5$, wenn zugleich die φ der identischen Gleichung genügen:

$$\varphi^{(0)} \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} \varphi^{(3)} + \varphi^{(4)} \varphi^{(5)} = 0$$

eine windschiefe Fläche (vgl. Lüroth, zur Theorie der w. F. Crelle 67). Demnach ist die Zahl der Wendungsberührebenen einer algebraischen Raumcurve $= \alpha_3$, wenn M_3 die Ordnung, p das Geschlecht, β die Zahl der Rückkehrpuncte der Raumcurve bedeutet. Ist ferner M die Ordnung, p das Geschlecht, β die Zahl der Rückkehrerzeu-

genden einer windschiefen Fläche, so ist die Zahl der Complexe 1. Ordnung, welche durch $6-i$ willkührlich angenommene Gerade im Raum und i auf einander folgende Erzeugende der windschiefen Fläche hindurchgehn:

$$i(M+(p-1)(i-1))-(i-1)\beta.$$

$$i=1, 2, \ldots 5.$$

II.

Ein anderes Berührungsproblem, dessen algebraische Lösung im Folgenden aufgestellt werden soll: die Anzahl $N_{i,k}$ derjenigen Curven s. Ord. eines Büschels zu bestimmen, welche mit einer gegebenen Curve eine i punctige Berührung in einem Punct und eine k punctige in einem anderen besitzen, ist zugleich mit der dualistisch entsprechenden Aufgabe zu betrachten, welche die Zahl $M_{i,k}$ der Curven eines Büschels von gegebener Classe bestimmt, die mit einer Curve von gegebener Classe in einem Puncte $i+1$, in einem anderen $k+1$ aufeinander folgende Tangenten gemeinsam haben. Es ergiebt sich aus einer auf die Beziehungen zwischen den Φ und φ gestützten Betrachtung — und dies ist im Nachfolgenden zu beachten — dass auch die Zahl $M_{i,k}$ einer Deutung in den φ fähig ist: sie bestimmt nämlich die Zahl der Fälle, wo sämmtliche Curven des Büschels s. Ordnung (mit

$i+k$ willkürlichen Parametern) mit der gegebenen Curve an einer Stelle i, an einer anderen k aufeinanderfolgende Puncte gemeinsam haben.

Ich bedarf im Folgenden eines elementaren Satzes über Resultanten (den ich übrigens nirgends erwähnt finden konnte) der zunächst aufgestellt werden möge.

§. 1.

Wenn 3 Gleichungen, welche 3 Unbekannte homogen enthalten, für ein und dasselbe Werthsystem verschwinden, so lässt sich, falls dieses Werthsystem bekannt ist, der nicht verschwindende Theil der Resultante in Form eines Quotienten darstellen, welcher in den Cocfficienten von jeder der gegebenen Functionen je von einer um 1 niedrigeren Dimension ist, als die eigentliche Resultante. Dieser Factor vertritt alsdann die Stelle der Resultante. Besitzen nämlich die Curven:

$$f(x) = 0 \quad \varphi(x) = 0 \quad \psi(x) = 0$$

einen gemeinsamen Punct, so ersetze man von jenen 3 Gleichungen eine, z. B. $\psi(x) = 0$ durch $\psi(x) + \varepsilon \, . \, \Psi(x) = 0$, wo Ψ eine beliebige Function von demselben Grade wie ψ ist, ε eine gegen Null convergirende Grösse, und bilde die Resultante. Alsdann hat der (bei verschwindendem ε dieselbe vertretende) Factor der ersten Potenz von ε zum Factor die Functionaldeterminante von f, φ und Ψ, geschrieben in den Coordinaten $(\alpha_1 \, \alpha_2 \, \alpha_3)$ des gemeinsamen Punctes. Hieraus folgt aber der obige Satz. Man zerlegt diesen Factor auch

mit Vortheil in die beiden: $[\Psi]_{x\,=\,\alpha}$ und $[\varphi]_{x\,=\,\alpha+\varDelta\alpha}$, wo die $\varDelta\alpha$ aus $f(\alpha+\varDelta\alpha)=0$ und einer beliebigen homogenen linearen Beziehung zwischen den $\varDelta\alpha$ zu berechnen sind.

§. 2.

$M_{i,\,k}$ repräsentirt die Zahl der gemeinsamen Lösungen von $f(x)=0$, $f(y)=0$ mit den gleich Null gesetzten Determinanten des folgenden unvollständigen Systems:

$$
7)\qquad
\left|\begin{array}{lcl}
\varphi^{(0)}(x) & \ldots\ldots\ldots & \varphi^{(r)}(x) \\
\varphi^{(0)}(x\ ) & \ldots\ldots\ldots & \varphi_{(r)}(x_1) \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\
\varphi^{(0)}(x_{i-1}) & \ldots\ldots\ldots & \varphi^{(r)}(x_{i-1}) \\
\varphi^{(0)}(y) & \ldots\ldots\ldots & \varphi^{(r)}(y) \\
\varphi^{(0)}(y_1) & \ldots\ldots\ldots & \varphi^{(r)}(y_1) \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\
\varphi^{(0)}(y_{k-1}) & \ldots\ldots\ldots & \varphi^{(r)}(y_{k-1})
\end{array}\right|
$$

wo $r=i+k$ ist, und die Bezeichnungen im Uebrigen wie in I. Man erhält diese Zahl, wenn man von den gemeinsamen Lösungen von

irgend zwei der Determinanten des Systems diejenigen abzieht, die einem unvollständigen System von Determinanten der nächst niederen Ordnung zukommen, welches diejenigen $r+1$ Verticalreihen umfasst, die in jeder der beiden Determinanten vorkommen (vgl. Salmon, anal. Geom. des Raums, Bd. II, Art. 10).

Bezeichnet man mit $N_{i,k}$ (in Uebereinstimmung mit der früheren Definition) die Zahl der gemeinsamen Werthepaare von $f(x)=0$, $f(y)=0$ mit den verschwindenden Determinanten des dem obigen analog in den Φ gebildeten unvollständigen Systems, so ergiebt sich durch eine einfache Betrachtung, dass die Zahl jener in der Formel für $M_{i,k}$ abzuzählenden Lösungen $= N_{i-1,\,k-1}$ ist.

Irgend zwei Determinanten A und B des Systems 7), gleich Null gesetzt, haben die Lösung $y=x$ mit $f(y)=0$, und zwar $i.k$ fach, gemeinsam. Wir setzen daher statt der Gleichung $A=0$ die folgende $A+\varepsilon . A'=0$ wo A' aus A enstehen soll, indem man eine oder mehrere der darin vorkommenden k gliedrigen Unterdeterminanten Φ der $\varphi(y)$ durch eine beliebige Function $\Psi(y)$ von gleich hoher Ordnung ersetzt. Nach ausgeführter Elimination von y möge ε gegen Null convergiren. Die Resultante ist in den $i$gliedrigen Determinanten der $\varphi(x)$ von der Ordnung N_k (vgl. I, §. 1). Gleich Null gesetzt, hat dieselbe mit $f(x)=0$ $2N_i . N_k$ Schnittpuncte gemeinsam, welche nicht in die allen φ gemeinsamen Puncte fallen.

Von diesen abzuziehn sind nun aber:

1. die 2β Lösungen $y_0 = x_{-1}$, $y_i = x_{k+1}$ welche durch Rückkehrpuncte veranlasst sind.

2. die Nullpuncte der von den $i.k$ Lösungen $y_s = x_t$ ($s = 0, 1, \ldots k$; $t = 0, 1, \ldots i$) herrührenden Factoren der Resultante, nämlich der $i.k$ten Potenz von

$$(s.A')_{y=x} \cdot (B)_{y=x_k}$$

Die Zahl derselben ist: $i.k(N_i + N_k)$ wegen des ersten, $ik(\alpha_{i+k} + \beta_{i+k})$ wegen des zweiten Factors. Die Zahl sämmtlicher beweglichen Schnittpuncte ist demnach:

$$M_{i,k} = 2N_i N_k - ik(N_i + N_k) -$$

$$- ik(\alpha_{i+k} + \beta) - 2\beta - N_{i-1,\,k-1}$$

oder auch:

8) $$M_{i,k} = 2(N_i - ik)(N_k - ik) - 2pi^2k^2 -$$

$$- 2\beta - N_{i-1,\,k-1}$$

woraus durch Vertauschung folgt:

8a) $$N_{i,k} = 2(M_i - ik)(M_k - ik) - 2pi^2k^2 -$$

$$- 2\alpha_{i+k} - M_{i-1,\,k-1}$$

wo die M_r, N_r aus I 5[a]) 5[b]) zu bestimmen sind. In diesen Formeln ist $N_{i-1,\, k-1}$ durchaus in M (welches alsdann als M_{i+k} eingeführt wird) $M_{i-1,\, k-1}$ durchaus in N auszudrücken, ehe ihre Werthe eingesetzt werden.

§. 3.

Durch wiederholte Anwendung der rekurrenten Formeln 8), 8[a]) erhält man die Schlussformeln:

9) $$M_{i,k} = N_{i-1,\, k-1} -$$

$$- 2ik(M + (p-1)(i+k-1) - \beta) - 2(i+k)\beta$$

wo:

$$N_{i,k} = (N_{i+1} - (i+1)(k+1))$$

$$\cdot (N_{k+1} - (i+1)(k+1)) -$$

$$-(i+1)(k+1)\, i \,.\, k \,.\, p - ik\beta +$$

9a) $$+ (i+1)(k+1)\,(M - i - k - 1);$$

ist, und die N_r sich aus der Formel 5[a]) in I. ergeben. Selbstverständlich lassen auch diese Formeln sich durch dualistische Vertauschung verdoppeln. Der Beweis der Richtigkeit derselben wird geführt durch den Schluss von $i-1$, $k-1$ auf i, k. Man nehme 9[a]), für $i-1$, $k-1$ geschrieben, als richtig an. Nun lässt sich vermöge 8) $M_{i,k}$ durch $N_{i-1,\, k-1}$ ausdrücken. Man er-

hält so eine Formel, welche mit der aus 9[a]) durch Vertauschung abgeleiteten für $M_{i,k}$ übereinstimmen wird. Auch die Formel 9) ist aus derselben leicht abzuleiten. Die Zahl $N_{i-1,0}$ beweist sich aber ohne Weiteres durch Abzählung an dem unvollständigen Determinantensystem, welches aus 7) durch Weglassung der $k-1$ letzten Horizontal- und der $k+1$ letzten Verticalreihen entsteht. Man erhält: $N_{i-1,0} = N_i(M-i)$, was mit 9[a]) übereinstimmt.

Die Schlussformeln 5[a]) und 9[a]), auf welche die algebraische Lösung der im Eingange zu I. und II. aufgestellten Aufgaben führt, sind in Uebereinstimmung mit den von Herrn Cayley durch geometrische Betrachtungen gefundenen Formeln.

§. 4.

Es erübrigt noch, einige geometrische Folgerungen aus den Formeln 9) 9[a]) zu ziehen.

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen, welche wir in I. §. 3 aufgestellt haben, hat man die Sätze:

Die Zahl der Tangenten einer Raumcurve, welche dieselbe noch einmal (in einem fremden Puncte) treffen, ist

$$N_{1,2} = 2(M-2)(M-3) + 2p(M-6) - M\beta.$$

Ebenso ist $M_{1,2}$ = der Zahl der Schmiegungsebenen, welche eine fremde Tangente enthalten

(vgl. Zeuthen, sur les courbes gauches, Annali di mat. Ser. II, t. III).

Die Zahl der Congruenzen 1. Ordnung, welche mit einer gegebenen windschiefen Fläche an einer Stelle derselben i aufeinanderfolgende Erzeugende, an der anderen k solche gemeinsam haben (wo $i, k = 1, 2, 3, 4$ und $i + k \leqq 5$ ist) und ausserdem durch $5 - i - k$ beliebige Gerade im Raume gehn, ist $= M_{i, k}$.

Die Zahl der Complexe 1. Ordnung, welche mit der windschiefen Fläche eine i punctige und eine k punctige Berührung gemeinsam haben, und durch $6 - i - k$ beliebige Gerade im Raum gehn, ist

$$= N_{i, k} \; (i, k = 1, 2, 3, 4; i + k \leqq 6).$$

Druckfehler.

Die letzte Seite von Nr. 17 der Nachrichten muss mit 370 statt mit 340 paginirt werden und Nr. 18 statt mit 342, mit 372 und so fortlaufend bis 386. Mit Nr. 19 der Nachrichten ist der Druckfehler wieder verschwunden.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

7. December. № 26. 1870.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung am 3. December.

Ewald, über die geschichtliche Folge der Semitischen Sprachen. (Erscheint in den Abhandlungen.)
Sartorius von Waltershausen, über den Aetna.
Wieseler, über den Delphischen Dreifuss.
Jahresbericht des Secretairs.

Am heutigen Tage feierte die K. Gesellschaft d. W. ihren Stiftungstag zum neunzehnten Mal in dem zweiten Jahrhundert ihres Bestehens. Nachdem die obigen Vorträge gehalten waren, erstattete der Secretair den folgenden Bericht:

Das unter den drei ältesten Mitgliedern der K. Societät jährlich wechselnde Directorium ist zu Michaelis d. J. von dem Hrn Geh. Hofrath Weber in der mathematischen Classe auf Hrn Professor Ewald in der historisch-philologischen Classe übergegangen.

Die K. Societät betrauert den Verlust ihres ordentlichen Mitgliedes, des Professors Wilhelm Keferstein. Er starb nach langer Erkrankung

am 25. Januar d. J. im nicht ganz vollendeten 37. Lebensjahre. Er war geboren zu Winsen a. d. Luhe am 7. Januar 1833.

Von ihren auswärtigen Mitgliedern verlor sie:

Sir James Clark in London, geb. 1788, gest. am 29. Juni d. J.

Gustav Magnus in Berlin, geboren daselbst am 2. Mai 1802, gestorben am 4. April d. J.

Carl August von Steinheil in München, geb. am 12. October 1801, gest. am 4. September d. J.

Wilhelm Wackernagel in Basel, geb. am 23. April 1806, gest. am 21. December 1869.

Von ihren Correspondenten verlor sie:

Axel Joachim Erdmann in Stockholm, geb. am 12. August 1812, gest. am 1. December 1869.

August Koberstein zu Schulpforta, geb. am 10. Januar 1797, gest. am 8. März. d. J.

Rudolf Köpke in Berlin, geb. am 23. August 1813, gest. am 10. Juni d. J.

Mit Bedauern sah die K. Societät aus ihrem Kreise zwei der Assessoren scheiden, den Hrn Professor Fittig, welchem die ord. Professur der Chemie in Tübingen übertragen wurde, und den Hrn Dr. Kohlrausch, welcher einem Rufe als ordentl. Professor der Physik in Zürich folgte.

Die von der K. Societät neu erwählten Mitglieder sind folgende:

Zum Ehrenmitglied wurde erwählt und von K. Curatorium bestätigt:

Herr Graf Sergei Stroganoff in St. Petersburg.

Zu auswärtigen Mitgliedern wurden erwählt und von K. Curatorium bestätigt die bisherigen Correspondenten:

Hr Professor Franz von Kobell in München.

Hr Professor Anton Schrötter Ritter von Kristelli in Wien.

Hr Director Francesco Brioschi in Mailand.

Zu Correspondenten wurden erwählt:

Hr Professor Wilhelm Hofmeister in Heidelberg.

Hr Professor Carl Friedrich Rammelsberg in Berlin.

Hr Professor Friedrich Kohlrausch in Zürich.

Hr Professor Paul Gordan in Giessen.

Hr Hofrath Alfred Ritter von Arneth in Wien.

Bezüglich der für dieses Jahr von der mathematischen Classe gestellten Preisfrage ist zu berichten, dass sie keinen Bearbeiter gefunden hat.

Für die nächsten Jahre werden von der K. Societät folgende Preisaufgaben gestellt:

Für den November 1871 von der historisch-philologischen Classe, von Neuem aufgegeben:

Qui literas antiquas tractant, res Graecorum et Romanorum duobus disciplinarum singularum ordinibus seorsum explicare solent. Quae separatio quanquam necessaria est, tamen quanta eadem incommoda habeat, facile est ad intelligendum; quae enim communia sint in utriusque cultura populi, quominus perspiciamus, impedit, quae ab altero instituta sunt, cum quibus alterius vel inventis vel institutis necessaria quadam et perpetua causarum efficientia cohaereant, ne intelligamus, graviter obstat, denique quae in historia rerum coniuncta sunt, seiungit. Quare omnia ea, quibus res utriusque populi inter se cohaerent, accurate inquiri haud levis videtur momenti esse. Quod cum Graeciae et Italiae incolas primitus inter se cognatos fuisse linguarum historiae scrutatores luculenter docuerint atque ex altera parte, quomodo cultura Graecorum et Romanorum initio Scipionum temporibus facto Caesarum aetate prorsus denique in unum coaluerit, accuratissime homines docti explicaverint, Societas regia literarum et gratum et fructuosum futurum esse existimat, quaenam vestigia rerum graecarum prioribus populi romani aetatibus appareant, studiose indagari et, quibus potissimum temporibus inde a regum aetate singula huius efficientiae genera ostendantur, a quibus ea regionibus et urbibus (Cumis, Sicilia, Massalia, Athenis, Corintho) profecta sint, denique quae ita praesertim in sermone, artibus, literis, institutis publicis conformandis effecta sint,

quantum quidem fieri potest, explicari. Quae quaestiones quanquam uno impetu absolvi non poterunt, tamen ad historiam veteris culturae rectius et plenius intelligendam multum videntur conferre posse. Societas igitur regia postulat, ut explicetur:

> quam vim res graecae in sermone, artibus, literis, institutis publicis Romanorum conformandis atque excolendis ante macedonicorum tempora bellorum habuerint.

„Die klassische Philologie ist gewohnt das griechische und das römische Alterthum in zwei gesonderten Reihen von Disciplinen zu behandeln. Diese Trennung ist nothwendig, aber sie hat auch ihre unverkennbaren Nachtheile; denn sie erschwert den Ueberblick über das Gemeinsame in der Kultur der Griechen und Römer, lässt die Kontinuität der Entwicklung nicht erkennen und zerreisst das geschichtlich Zusammengehörige. Es ist daher wichtig die Berührungspunkte und Wechselbeziehungen in der Entwicklung beider Völker ins Auge zu fassen. Nachdem nun sprachgeschichtliche Untersuchungen über die ursprüngliche Verwandtschaft derselben neues Licht verbreitet haben (die gräko-italische Epoche) und auf der andern Seite die Verschmelzung der griechischen und römischen Cultur, wie sie in der Zeit der Scipionen begonnen und unter den Cäsaren sich vollendet hat (hellenistische Epoche), mit Erfolg durchforscht und dargestellt worden ist, so scheint es der K. Ges. d. Wiss. eine anziehende und lohnende Aufgabe zu sein, den Spuren griechischer Einwirkung, welche

sich in den früheren Perioden der römischen Geschichte zeigen, sorgfältig nachzugehn und, so weit es möglich ist, die verschiedenen Epochen dieser Einwirkung, von der Königszeit an, ihre verschiedenen Ausgangspunkte (Kumä, Sicilien, Massalia, Athen, Korinth), und die Ergebnisse derselben, namentlich auf dem Gebiete der Sprache, der Kunst, der Literatur, und des öffentlichen Rechts zu ermitteln. Wenn auch diese Untersuchung sich nicht sogleich zu einem Abschluss führen lässt, so verspricht sie doch sehr erhebliche Ausbeute für die Geschichte der alten Kultur. In diesem Sinne stellt die K. Ges. d. Wiss. die Aufgabe:

Darstellung der hellenischen Einflüsse, welche sich in der Sprache, der Kunst, der Literatur und dem öffentlichen Rechte der Römer vor der Zeit der makedonischen Kriege erkennen lassen."

Für den November 1872, von der physikalischen Classe von Neuem aufgegeben:

R. S. postulat, ut viarum lacrymalium structura omnis, comparandis cum homine animalibus, illustretur, praecipue vero de iis exponatur apparatibus, qui absorbendis et promovendis lacrymis inservire dicuntur, de epithelio, de valvulis, de musculis et plexibus venosis ductui lacrymali vel innatis vel adjacentibus.

„Die K. Societät verlangt eine vergleichend-anatomische Beschreibung des Thränen leitenden Apparats, mit besonderer Berücksichtigung der Einrichtungen, welche bei der Aufsaugung und Förderung der Thränen-

flüssigkeit in Betracht kommen, des Epithelium, der Klappen, der Muskeln und Gefässgeflechte in den Wänden der Thränenwege und deren Umgebung.“

Für den November 1873 wünscht die mathematische Classe:

Theoriam numerorum generalissime complexorum formarumque omnis gradus in factores lineares resolubilium.

Eine Theorie der allgemeinsten complexen Zahlen und der zerlegbaren Formen aller Grade.

Die Concurrenzschriften müssen vor Ablauf des Septembers der bestimmten Jahre an die K. Gesellschaft der Wissenschaften portofrei eingesandt sein, begleitet von einem versiegelten Zettel, welcher den Namen und Wohnort des Verfassers enthält und auswendig mit dem Motto versehen ist, welches auf dem Titel der Schrift steht.

Der für jede dieser Aufgaben ausgesetzte Preis beträgt funfzig Ducaten.

Schliesslich ist noch zu bemerken, dass der Druck des XV. Bandes der Abhandlungen der K. Gesellschaft der W. wahrscheinlich noch bis zu Ende dieses Jahres beendigt sein wird, und dass von der zweiten Ausgabe der Gauss'schen Werke der I. Band bereits ausgegeben ist und der Druck des II. Bandes begonnen hat, wäh-

rend von der e r s t e n Ausgabe der IV. Band fast vollendet, der V. bereits erschienen und der Druck des VI. Bandes bis ungefähr zur Hälfte vorgeschritten ist.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

21. December. № 27. 1870.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber die Phasenänderung bei der Brechung und Reflexion der Lichtwellen

von

G. Quincke,

correspondirendem Mitgliede der K. Gesellschaft.

Eine längere Reihe von Versuchen, die Aenderung der Phase der Lichtwellen bei der Brechung oder Reflexion des Lichtes mit Hülfe von Interferenzapparaten zu bestimmen, hat zu folgenden Resultaten geführt.

Lässt man 2 Strahlenbündel interferiren, von denen das eine durch Luft, das andere durch eine dünne durchsichtige Lamelle gegangen ist, so hängt im Allgemeinen die Lage der Interferenzstreifen nicht bloss von dem Gangunterschied, sondern auch von dem Intensitätsverhältniss der interferirenden Strahlen ab. Es rührt dies daher, dass man in den meisten Fällen unwillkührlich statt eines einzigen mehrere Interferenzapparate hinter einander benutzt.

Die Lage der Interferenzstreifen lässt sich bis auf Zehntel des Fransenabstandes genau bestimmen. Ein Irrthum von einer ganzen Anzahl Interferenzstreifen wird durch Anwendung keilförmiger Lamellen vermieden, indem man den Gangunterschied der interferirenden Strahlenbündel von 0 bis zu einem Maximum wachsen lässt.

Abgesehen von der umständlichen Berechnung gewähren die von mir früher (Pogg. Ann. 132. p. 321—371. 1867) beschriebenen lamellaren Beugungserscheinungen die genaueste und bequemste Methode die Phasenänderung zu bestimmen, welche den Lichtwellen bei dem Durchgange durch eine dünne durchsichtige Lamelle mitgetheilt worden ist. Die aus Dicke und Brechungsexponenten der Lamelle berechneten Werthe der Phasenänderung weichen von den beobachteten oft erheblich ab. Die Abweichungen können einem Gangunterschied von 0,3 λ entsprechen, und scheinen auf eine Aenderung der Phase bei dem Uebergange der Lichtwellen aus einem Medium in das andere hinzudeuten.

Untersucht man mit ähnlichen Methoden durchsichtige Lamellen von Silber, welche auf planparallelen Glasplatten liegen, so zeigt die Lage der lamellaren Beugungsstreifen, dass Phase und Amplitude des Lichtes bei dem Durchgange durch das Metall geändert werden und dass die Aenderung von der Dicke des Metalls abhängt.

Die Aenderung der Phase beträgt für verschiedene Dicken des Metalls, welche kleiner als 0,000040 mm. sind, nahezu $+\pi$. Die Minimalstellen der lamellaren Beugungsstreifen haben gegen den Rand der durchsichtigen Silberlamelle nahezu dieselbe Lage, wie die Maximalstellen

der äusseren Beugungsfransen Fresnel's gegen den Rand eines undurchsichtigen Schirmes.

Die bei dem Durchgang durch das Metall auftretende Phasenänderung der Lichtwellen ändert sich mit dem Einfallswinkel und der Lage der Polarisationsebene.

Die Erscheinungen lassen sich nicht durch die Annahme erklären, dass der Brechungsexponent des durchsichtigen Silbers < 1 ist.

Aehnliche Schwierigkeiten, wie bei der Brechung, bietet die Bestimmung der Phasenänderung des Lichtes bei der Reflexion.

Bei streifender Reflexion ($J = 90^0$) unterscheiden sich die Phasen des directen und reflectirten Strahles stets um $\pm \pi$, die Reflexion mag in einem beliebigen Medium stattfinden, sie mag gewöhnlich, metallisch oder total sein; Farbe und Lage der Polarisationsebne sind gleichgültig.

Für andere Einfallswinkel als 90^0 lässt sich der absolute Werth der Phasenänderung bei der Reflexion nicht bestimmen. Man muss sich dann begnügen den relativen Werth der Phasenänderung zu bestimmen oder den Gangunterschied, welchen zwei Strahlenbündel von derselben Farbe und Polarisationsebene bei der Reflexion unter demselben Einfallswinkel auf verschiedenen Medien (Luft, Glas, Metall etc.) oder bei Reflexion unter verschiedenen Einfallswinkeln auf demselben Medium zeigen.

Im Allgemeinen stimmen die beobachteten Unterschiede der Phasenänderung mit den Werthen überein, welche man aus Haupteinfallswinkel und Hauptazimuth der reflectirenden Fläche mit Hülfe der Theorie berechnen kann. Es ist dabei zu bemerken dass, wie Herr Jochmann (Pogg. Ann. 136. p. 585. 1869) gezeigt hat, die

von **Cauchy** und Hrn. **Eisenlohr**, sowie die von Hrn. **Neumann** gegebenen Formeln zu fast genau denselben Werthen für die Phasenänderung bei der Reflexion führen, obwohl die betreffenden Theorien unter ganz verschiedenen Voraussetzungen abgeleitet sind. Ueber die Lage der Schwingungen der Aethertheilchen gegen die Polarisationsebne können Versuche über die Phasenänderung bei der Reflexion des Lichtes keinen Aufschluss geben.

Beobachtete und berechnete Lage der von verschiedenartig reflectirtem Licht gebildeten Interferenzstreifen weichen oft um 0,3 und mehr Fransenbreite von einander ab. Diese Abweichungen, welche bei allen benutzten Methoden (**Fresnel**'sche Spiegel, Interferenzprisma, **Billet**'schen Halblinsen, **Brewster**'schen Planparallelgläsern, Interferenzstreifen dicker Platten im Spectrum, **Newton**'schen Farbenringen) auftreten, erklären sich zum grössten Theil, wenn nicht ganz und gar, durch die Adsorption von Gasen und Dämpfen an der Oberfläche der reflectirenden Flächen. Die Abweichungen treten häufiger bei Reflexion in Luft als bei Reflexion in Glas auf.

Die Untersuchung des von dünnen durchsichtigen Lamellen reflectirten (elliptisch polarisirten) Lichtes zeigt, dass von sehr dünnen Lamellen, deren Dicke etwas kleiner als 0,2 λ ist, die Reflexion in anderer Weise vor sich geht, als an dickeren Lamellen.

Um mit den bis jetzt bekannten Thatsachen in Uebereinstimmung zu bleiben, würde eine Theorie die Annahme zu machen haben, dass der Vorgang der Reflexion und Brechung nicht in der geometrischen Grenze zweier Medien statt-

findet, sondern in einer Uebergangsschicht von endlicher Dicke.

Berlin im December 1870.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

November.

Nature. Nr. 54. 55. 56.
Giuseppe Bellucci, sull' Ozono note e riflessioni. Prato 1869. 8.
Smithsonian contributions to knowledge. Vol. XVI. Washington 1870. 4.
Smithsonian Miscellaneous Collections. Vol. VIII. IX. Ebd. 1869. 8.
A. B. Yould, the trans-Atlantic longitude as determined by the Coast Survey Expedition. Ebd. 1869. 8.
Smithsonian Report. 1868. Ebd. 1869. 8.
Report of the Superintendent of the Coast Survey, showing the progress of the Survey during the year 1866. Ebd. 1869. 4.
Tables of Harmonia by E. Schubert. Computed for the American Ephemeris and Nautical Almanac. Ebd. 1869. 4.
Conchological Notes. Number 1. 2. 3.
W. H. Dall, materials of the family Lepetidae.
— Karte von Alaska und dem angrenzenden Territorium.
Transactions of the Chicago Academy of Sciences. Vol. I. Part II. Chicago 1869. gr. 8.
Chicago Board of Trade 1867. 68. 69. Ebd. 1867—69. 8.
Proceedings of the American Association for the Advancement of Science. XVII Meeting held at Chicago. August 1868. Cambridge 1869. 8.
Programme of the American Association for the Advancement of Science. Chicago 1868. 8.

Annals of the Lyceum of Natural History in the city of New-York. 8.
Bulletin of the Essex Institute. Vol. I. Number 1—12. Salem 1869. 8.
Proceedings and Communications of the Essex Institute. Vol. VI. Part I. 1868. Ebd. 1870. 8.
Ohio Ackerbau-Bericht 1868. Zweite Reihe. Columbus, Ohio 1869. 8.
Proceedings of the Boston Society of Natural History. Vol. XII. Sign. 18 — end. XIII, 1—14. Boston 1869. 8.
Louis Agassiz, address delivered on the centennial anniversary of the birth of A. v. Humboldt. Ebd. 1869. 8.
Dr. A. A. Gould, Report on the Invertebrata of Massachusetts. Ebd. 1870. 8.
Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. VIII. 8.
Details of an unpaid claim on France for 24,000,000 francs guaranteed by the parole of Napoleon III. Philadelphia 1869. 8.
B. Anderson, narrative of a journey to Musardu. New-York 1870. 8.
The American Ephemeris and Nautical Almanac, for the year 1872. Washington 1870. gr. 8.
Proceedings of the American Philosophical Society held at Philadelphia. Vol. XI. Nr. 81. 82. 8.
Bulletin of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College; Cambridge. Nr. 9—13. 8.
Third Report of the Commissioner of Fisheries of Maine 1869. Augusta 1870. 8.
Hankel, elektrische Untersuchungen. Achte Abhandlung. Leipzig 1870. gr. 8.
P. A. Hansen, Sonnenparallaxe. Ebd 1870. gr. 8.
Berichte über die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig:
Mathem.-phys. Classe 1869. II. III. IV. 1870. I. II.
Philolog.-histor, Classe 1868. II. III. 1869. I. II. III.
Leipzig 1869. 70. 8.
Georg Voigt, Denkwürdigkeiten des Minoriten Jordanus von Giano. Ebd. 1870. gr. 8.
C. Bursian, Erophile, vulgärgriechische Tragödie von G. Chortatzes. Ebd. 1870. gr. 8.
C. Stüve, Untersuchungen über die Gogerichte in Westfalen und Niedersachsen. Jena 1870. 8.
Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1869. I. II. Berlin 1870. 4.

C. F. Zittel, Denkschrift auf Ch. E. Hermann von Meyer. München 1870. 4.
A. de la Rive, recherches sur la polarisation rotatoire magnétique des liquides. 8.
Bulletin de la Société Imp. des Naturalistes de Moscou. Année 1870. Nr. I. Moscou 1870. 8.
Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia. Nr. 1—6. 1868. u. Nr. 1—4. 1869. Philadelphia 1868. 69. 8.
Annual Report of the Department of Agriculture for 1868 and monthly Reports of same Department for 1869. Washington. 8.
Αρχαιολογικη Εφημερις. 1862. 8 Hefte, 1863 4 H., 1869 1 H. 1870 1 H. Athen. 4.
De Colnet-d'Huart, mémoire sur la théorie mathematique de la chaleur et de la lumière. Luxembourg 1870. 4.
W. Ritter von Haidinger, Der 8. November 1845. Jubel-Erinnerungstage. Rückblick auf die Jahre 1845 bis 1870. Wien. 8.
The Transactions of the Linnean Society. Vol. XXVI. Pt. 4. Vol. XXVII. Parts 1 and 2. London 1869. 70. 4.
The Journal of the Linnean Society.
Zoology. Vol. X. Nr. 47. 48.
Botany. Vol. XI. Nr. 52. 53. Ebd. 1869. 70. 8.
Proceedings of the Linnean Society. Session 1869—70. 8.
List of the Linnean Society 1869. 8.
Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereines für Steiermark. Bd. II. Heft 2. Graz 1870. 8.
Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1870. Bd. XX. Nr. 3. Juli — September. Wien 1870. gr. 8.
Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Nr. 10. 11. 12. Ebd. 1870. gr. 8.
Monatsbericht der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Juni 1870.
Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles. Bogen 9. 1870.

Register
über die
Nachrichten
von der
königl. Gesellschaft der Wissenschaften
und der
Georg-Augusts-Universität
aus dem Jahre 1870.

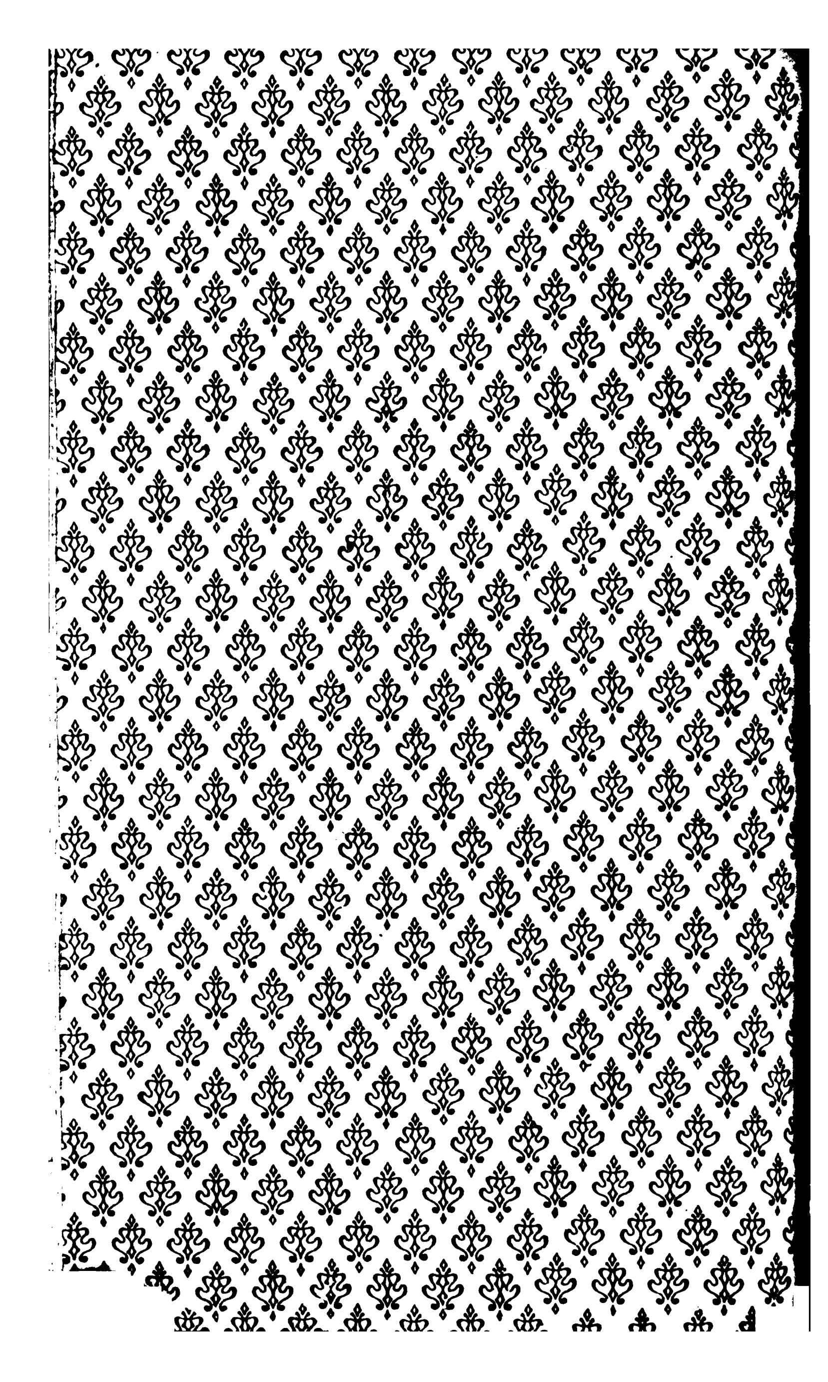
---

jüngst entdeckten 60 Phönikischen Inschriften 33. *S. Lie*, über die Reciprocitäts-Verhältnisse des Reye'schen Complexes 53. *R. Fittig*, über das Tetramethylbenzol 66. *A. Enneper*, über eine Erweiterung des Begriffs von Parallelflächen 70. *A. Stuart*, Neapolitanische Studien 99. *E. Riecke*, über die Ersetzung eines auf einer Oberfläche befindlichen Systems galvanischer Ströme durch eine Vertheilung magnetischer Massen 103. *H. Sauppe*, die Angaben über Terentius Lebenszeit 111. *C. Schweigger*, über die Grösse des ophthalmoscopischen Bildes 143. *F. Wieseler*, über die Kestnersche Sammlung von antiken Lampen 163. *W. Klinkerfues*, Versuche über die Bewegung der Erde und der Sonne im Aether 226. *Sartorius von Waltershausen*, über den Isomorphismus des schwefelsauren Blei's, Baryt's, Strontian's, Kalk's, Kali's, Natron's und Ammoniak's 236. *M. A. Stern*, über einen einfachen Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes und einige damit zusammenhängende Sätze 237. *A. Clebsch*, über gewisse Probleme aus der Theorie der Oberflächen 253. *F. Kohlrausch*, über den Einfluss der Temperatur auf die Elasticitätscoefficienten einiger Metalle 257. *A. Enneper*, über ein Problem der analytischen Geometrie 267. *E. B. Christoffel*, über die Abbildung einer einblättrigen, einfach zusammenhängenden, ebenen Fläche auf einem Kreise 283. *G. Waitz*, über die Annalen von Lüttich, Fosses und Lobbes 302. *E. Schering*, die Schwerkraft im Gaussischen Raum 311. *J. B. Listing*, Notiz über ein neues Mikroskop von R. Winkel 321. *W. Wicke*, Vegetations-Versuche 323. *A. Enneper*, Zur Charakteri-

stik der Helikoidflächen 335. *G. Meissner*, fortgesetzte Untersuchungen über den elektrisirten Sauerstoff 343. *E. B. Christoffel*, über die Abbildung einer *n*blättrigen, einfach zusammengesetzten, ebenen Fläche auf einem Kreise 359. *W. Wicke*, über die Zusammensetzung und den Nährwerth essbarer Pilze 387. *F. Kohlrausch*, Mittheilung einer von Herrn E. Riecke im physikalischen Institut ausgeführten experimentellen Prüfung des Neumann'schen Gesetzes über den Magnetismus der Rotationsellipsoide 396. *F. Kohlrausch*, über einige hydro- und thermoelektromotorische Kräfte, zurückgeführt auf Siemens'sches Widerstandsmaass und Weber'sches Strommaass 400. *A. Clebsch*, zur Theorie der binären algebraischen Formen 405. *F. Wöhler*, Analyse des Pyrosmaliths 411. *F. Kohlrausch*, über eine durch die verschiedene Brechbarkeit des Lichtes hervorgebrachte stereoskopische Wirkung 415. *P. Gordan*, die partiellen Differentialgleichungen, denen die Resultante *R* einer Form *n*t Grades und einer Form *m*t Grades genügt 427. *R. Lipschitz*, Beiträge zu der Theorie der Umkehrung eines Functionensystems 459. *R. v. Willemoes-Suhm*, über einen Balanoglossus im Nordmeere 478. *G. Waitz*, über das sogenannte Chronicon Thuringicum Viennense 481. *Th. Benfey*, Sanskritischer Ablativ auf ursprüngliches *at* von Themen auf *u* 490. *A. Enneper*, über asymptotische Linien 493. *F. Kohlrausch*, Beobachtungen im magnetischen Observatorium a. d. Jahre 1869 513. *E. Brill*, über zwei Eliminationsprobleme aus der Theorie der Curven, welche gegebenen Bedingungen genügen 525. *G. Quincke*, über die Phasen-

---

Göttingen.
Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei.
W. Fr. Kaestner.




UNIVERSITY OF MICHIG
3 9015 06448 0976